

Université Paul Sabatier
Toulouse III

ILLIG Aude
Juin 2001

PROBABILITÉS DE CONFIANCE APRÈS DÉCISION
LORS D'UN TEST SÉQUENTIEL
AVEC UN TEMPS DE BON FONCTIONNEMENT
DE LOI EXPONENTIELLE

Mémoire de DEA encadré par :
Mr GAREL, Professeur à l'ENSEEIH

Table des matières

Introduction	3
1 Test séquentiel du rapport des probabilités	5
1.1 Généralités	5
1.1.1 Définition du test séquentiel du rapport des probabilités	5
1.1.2 Détermination des constantes A et B du TSRP	8
1.1.3 Mise en oeuvre du test séquentiel sur un exemple	12
1.1.4 Fonction d'efficacité et fonction ASN	14
1.1.5 Gain de la méthode séquentielle	24
1.1.6 Preuve que le TSRP s'arrête p.s. et moments de N	27
1.2 Test tronqué	29
1.2.1 Présentation	29
1.2.2 Majoration des risques du test tronqué	30
1.2.3 Méthode directe de Aroian	32
2 Application des tests séquentiels au problème du MTBO	35
2.1 Application du TSRP à un échantillon de loi exponentielle	36
2.1.1 Le test séquentiel du rapport des probabilités	36
2.1.2 Version continue du test séquentiel du rapport des probabilités	36
2.2 Problème de décision séquentielle pour des processus à temps continu	39
2.2.1 TSRP d'un processus à temps continu	39
2.2.2 Propriétés du TSRP d'un processus à temps continu	41
2.2.3 Application au processus de Poisson	45
2.3 Test tronqué	52
2.3.1 Troncature du test	52
2.3.2 Application	55
3 Limites de confiance pour le vrai MTBO après test	57
3.1 Introduction	57
3.1.1 Description du problème	57
3.1.2 Standardisation et notations	57
3.2 Limite de confiance	60
3.2.1 Calculs des probabilités d'acceptation et de continuation	60
3.2.2 Limite de confiance après acceptation	62
3.2.3 Limite de confiance après rejet	65
3.2.4 Applications	66

A	Processus de Poisson	81
A.1	Rappels et définitions	81
A.2	Le processus de Poisson homogène sur \mathbb{R}^+	82
A.2.1	Processus ponctuels et fonction de comptage	82
A.2.2	Le processus de Poisson	84
A.2.3	Propriétés du processus de Poisson	85
B	Martingales à temps discret	91
B.1	Martingales et temps d'arrêt	91
B.2	Processus arrêtés	93
C	Méthode générale pour obtenir des intervalles de confiance	95
	Conclusion	99
	Bibliographie	101

Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier un problème de qualification d'équipements intervenant au moment de l'atterrissage des avions. Il s'agit de capteurs placés en bord de piste qui permettent à chaque instant à l'appareil de déterminer sa trajectoire. Toute interruption dans le fonctionnement du capteur peut avoir de graves conséquences au moment de l'atterrissage de l'avion.

Les experts de l'entreprise fabriquant ce type d'équipement aimeraient bien sûr éviter cette éventualité. C'est pourquoi, avant de mettre ces capteurs en service, on souhaite pouvoir déterminer si ces capteurs sont conformes, ou plus exactement si le temps moyen de fonctionnement entre deux interruptions aussi appelé MTBO (Mean Time Between Outages) est suffisamment long.

Les temps entre deux interruptions dans le fonctionnement d'un capteur sont supposés indépendants et de loi exponentielle de paramètre $1/\theta$, où θ est le MTBO de l'équipement. On se fixe de plus un temps θ_0 pendant lequel le capteur doit en moyenne fonctionner sans interruption et le problème de qualification se ramène alors à déterminer au moyen d'une procédure statistique si le MTBO du capteur est égal à θ_0 ou à une valeur inférieure θ_1 .

Par prudence, une fois le test effectué, il faudra déterminer dans quelle mesure on peut faire confiance à la procédure de test.

Afin d'optimiser ses coûts et de gagner du temps, l'entreprise qui fabrique les capteurs désire procéder à la qualification de ses équipements en un temps minimum.

Dans ce but, nous nous orienterons vers des tests statistiques séquentiels, connus pour être plus économes en moyenne en observations nécessaires pour prendre une décision que des tests classiques. Plus précisément, puisque nous souhaitons tester des hypothèses simples, nous utiliserons le test séquentiel du rapport des probabilités.

L'économie d'observations permise par ce type de procédure étant une économie moyenne, nous serons amené à utiliser des versions tronquées de ces procédures séquentielles.

En ce qui concerne la détermination de limites de confiance, bien qu'il existe des méthodes bayésiennes, nous nous limiterons à des méthodes plus classiques en accord avec les industriels qui préfèrent ne pas faire d'hypothèse sur la loi du paramètre.

Les tests séquentiels et plus précisément les tests séquentiels du rapport des probabilités, ont été introduits par le mathématicien Wald pendant la seconde guerre mondiale mais son livre [13] ne fût, pour des raisons évidentes, publiés qu'en 1947.

Contrairement aux tests classiques, ces tests sont définis par récurrence sur le nombre d'observations, qui n'est donc pas fixé a priori. Wald a entre autre démontré que l'utilisation du test séquentiel du rapport des probabilités permettait souvent une économie moyenne d'au moins 50% sur le nombre d'observations par rapport à une procédure classique.

Sur la base des travaux effectués par Wald, de nombreux mathématiciens ont développé la théorie des tests séquentiels. Dans le cadre d'une loi exponentielle, l'article [4] d'Epstein et Sobel paru en 1955 est le premier à recenser l'ensemble des résultats et leur démonstration sur l'utilisation du test séquentiel du rapport des probabilités.

Plus tard, Aroian dans [1] et [2] a cherché à étudier les propriétés des tests séquentiels tronqués, par l'utilisation de méthodes directes de calculs qui ont ensuite été appliquées et développées dans le cas particulier de la loi exponentielle par Sumerlin dans [7].

Une fois les procédures séquentielles bien connues, à partir de 1970, les statisticiens se sont intéressés à la détermination d'intervalles de confiance suite à l'utilisation d'une procédure séquentielle. Notamment Bryant et Schmee dans [3] présentent une méthode permettant d'obtenir des limites de confiance pour le MTBO.

Ce problème de qualification s'inscrit donc au coeur des travaux effectués en analyse séquentielle. L'étude des tests séquentiels du rapport des probabilités et leurs propriétés font l'objet du chapitre 1. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux tests tronqués plus adaptés à notre problème en raison des soucis d'économie de l'entreprise.

Dans le chapitre 2 nous appliquons les résultats du chapitre 1 au cas d'une loi exponentielle, avec quelques modifications cependant. Nous obtenons ainsi une procédure séquentielle permettant de déterminer si un capteur est défectueux ou pas.

Enfin, désireux de connaître la confiance que l'on peut accorder à la décision prise par la procédure, nous étudions une méthode permettant d'obtenir des limites de confiance inférieures et supérieures pour le MTBO de chaque capteur après acceptation ou rejet. Nous en déduisons les probabilités que le vrai MTBO dépasse une valeur donnée lorsque l'acceptation a lieu après i interruptions.

Chapitre 1

Test séquentiel du rapport des probabilités

Dans tout le chapitre, nous considérerons X_1, \dots, X_n, \dots un échantillon de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et identiquement distribuées dont on notera x_1, \dots, x_n les réalisations.

La loi de X_1 dépend d'un paramètre $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ et est donnée par $f(x, \theta)$ qui désigne la densité de X_1 au point x pour le paramètre θ si X_1 est absolument continue ou la probabilité que X_1 prenne la valeur x pour le paramètre θ si X_1 est une variable aléatoire discrète.

On désire alors tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1$. Il est clair que $f(x, \theta_0)$ est la densité de X_1 (ou probabilité que X_1 soit égale à x) lorsque l'hypothèse H_0 est vraie. De la même manière, $f(x, \theta_1)$ désigne la densité de X_1 (ou probabilité que X_1 soit égale à x) lorsque H_1 est vraie.

Enfin, pour tout événement $E \in \mathcal{A}$, on notera $\mathbb{P}_\theta(E) := \mathbb{P}(E \mid \theta \text{ est le vrai paramètre})$.

1.1 Généralités

Cette partie a pour but, de présenter le **test séquentiel du rapport des probabilités** introduit par **Wald** en 1943 et d'en donner les principales propriétés.

1.1.1 Définition du test séquentiel du rapport des probabilités

Soient

$$p_{0,m} = \prod_{i=1}^m f(X_i, \theta_0) \text{ et } p_{1,m} = \prod_{i=1}^m f(X_i, \theta_1).$$

On pose

$$l_m = \frac{p_{1,m}}{p_{0,m}}.$$

Définition 1.1.1 Le *test séquentiel du rapport des probabilités* (ou *TSRP*) $S(A,B)$ pour tester H_0 contre H_1 est défini de la manière suivante :

on se donne deux constantes positives A et B généralement telles que $B < 1 < A$ et à chaque étape m de l'expérience, on calcule le rapport des probabilités l_m et on adopte la règle de décision suivante :

- si $B < l_m < A$ on continue l'expérience en prenant une nouvelle observation,
- si $l_m \geq A$ on rejette H_0 (on accepte H_1),
- si $l_m \leq B$ on accepte H_0 .

De manière générale, il est pratique pour les calculs de prendre le logarithme du rapport des vraisemblances l_m . On a

$$\text{Log } l_m = \sum_{i=1}^m \text{Log} \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)},$$

avec

$$Z_i = \text{Log} \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)}. \quad (1.1)$$

Il est alors possible de décrire la règle de décision du test séquentiel à l'étape m de la manière suivante :

- si $\text{Log} B < \sum_{i=1}^m Z_i < \text{Log} A$, alors on continue l'échantillonnage,
- si $\sum_{i=1}^m Z_i \geq \text{Log} A$, on rejette H_0 ,
- si $\sum_{i=1}^m Z_i \leq \text{Log} B$, on accepte H_0 .

Remarque :

- Si $p_{1,m} = p_{0,m} = 0$, alors on pose $l_m := 1$.
- Si $p_{1,m} > 0$ et $p_{0,m} = 0$ alors $l_m \geq A$ et on termine par conséquent le test à l'étape m par le rejet de H_0 .

Une relation fondamentale

De façon plus formelle, on peut définir trois régions à chaque étape m de la procédure séquentielle :

- D_m^1 la région de rejet,
- D_m^0 la région d'acceptation,
- et D_m la région de continuation.

L'ensemble des échantillons (d'observations) de D_m conduisent à continuer la procédure séquentielle. D'où $(x_1, \dots, x_m) \in D_m$ si

$$\forall n \leq m \quad B < l_n < A.$$

De même D_m^1 est l'ensemble des échantillons (d'observations) conduisant à décider H_1 . Alors $(x_1, \dots, x_m) \in D_m^1$ si

$$\forall n < m \quad B < l_n < A \text{ et } l_m \geq A.$$

Enfin D_m^0 est l'ensemble des échantillons (d'observations) conduisant à décider H_0 . Alors $(x_1, \dots, x_m) \in D_m^0$ si

$$\forall n < m \quad B < l_n < A \text{ et } l_m \leq B.$$

Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Pour tout test séquentiel du rapport des probabilités et tout $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\theta(\text{ Continuer la procédure à l'étape } n) + \mathbb{P}_\theta(\text{ Décider } H_0 \text{ avant ou à l'étape } n) \\ & + \mathbb{P}_\theta(\text{ Décider } H_1 \text{ avant ou à l'étape } n) = 1. \end{aligned}$$

qui en termes de D_m^1 , D_m^0 et D_m , s'écrit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_n) \in D_n) + \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^1) \\ & + \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^0) = 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Par continuité inférieure de la probabilité, on obtient que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_n) \in D_n) & = \mathbb{P}_\theta(\bigcap_{m \geq 1} \{(X_1, \dots, X_m) \in D_m\}) \\ & = \mathbb{P}_\theta(\text{ Le test ne s'arrête pas }) \end{aligned}$$

et par σ -additivité on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^0) & = \mathbb{P}_\theta(\bigcup_{m \geq 1} \{(X_1, \dots, X_m) \in D_m^0\}) \\ & = \mathbb{P}_\theta(\text{ Décider } H_0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^1) & = \mathbb{P}_\theta(\bigcup_{m \geq 1} \{(X_1, \dots, X_m) \in D_m^1\}) \\ & = \mathbb{P}_\theta(\text{ Décider } H_1). \end{aligned}$$

On peut alors passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (1.2) et on obtient la relation fondamentale :

$$\mathbb{P}_\theta(\text{ Le test ne s'arrête pas }) + \mathbb{P}_\theta(\text{ Décider } H_1) + \mathbb{P}_\theta(\text{ Décider } H_0) = 1. \tag{1.3}$$

Nous allons démontrer dans le paragraphe 1.1.7 que, pour tout $\theta \in \Theta$, le test séquentiel du rapport des probabilités s'arrête en un nombre fini d'observations avec une probabilité égale à 1. On pourra alors en déduire que

$$\mathbb{P}_\theta(\text{Décider } H_1) + \mathbb{P}_\theta(\text{Décider } H_0) = 1. \quad (1.4)$$

Remarque :

Tous les tests séquentiels ne s'arrêtent pas en un nombre fini d'observations avec une probabilité égale à 1. Il s'agit d'une particularité du TSRP.

1.1.2 Détermination des constantes A et B du TSRP

Afin de pouvoir définir correctement le test séquentiel du rapport des probabilités $S(A,B)$, il faut choisir les constantes A et B .

On se fixe un couple (α, β) avec $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$ et les constantes A et B sont alors, en théorie, déterminées de façon à ce que le test ait pour erreurs de première et deuxième espèces respectivement α et β .

Cependant, en pratique, il est difficile de calculer exactement les constantes A et B . C'est pourquoi nous allons d'abord nous intéresser aux relations qui existent entre A , B , α et β et ensuite nous chercherons à obtenir une approximation de ces constantes.

Relations entre A , B , α et β

Théorème 1.1.2 *Soit un test séquentiel du rapport des probabilités $S(A,B)$ d'erreurs de première et deuxième espèces respectivement α et β . Alors :*

$$A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha}. \quad (1.5)$$

Démonstration :

Lorsqu'un échantillon d'observations (x_1, \dots, x_m) conduit à décider H_0 , on dit qu'il est de type 0. De même lorsqu'un échantillon conduit à décider H_1 , on dit qu'il est de type 1. Nous noterons alors D_j , $j = 0, 1$, l'ensemble des échantillons de type j .

Par conséquent $(x_1, \dots, x_m) \in D_0$ si

$$B < l_n(x_1, \dots, x_n) < A \quad \forall n < m \quad \text{et} \quad l_m(x_1, \dots, x_m) \leq B.$$

De même $(x_1, \dots, x_m) \in D_1$ si

$$B < l_n(x_1, \dots, x_n) < A \quad \forall n < m \quad \text{et} \quad l_m(x_1, \dots, x_m) \geq A.$$

On a donc

$$D_1 = \bigcup_{m \geq 1} D_m^1 \quad \text{et} \quad D_0 = \bigcup_{m \geq 1} D_m^0,$$

où D_m^1 et D_m^0 ont été définis dans le paragraphe 1.1.1.

▷ Considérons (x_1, \dots, x_m) un échantillon de D_1 , alors

$$\begin{aligned}
l_m &\geq A \\
\Leftrightarrow \prod_{i=1}^m \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)} &\geq A \\
\Leftrightarrow \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta_1) &\geq A \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta_0).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Si on intègre (1.6) sur $D_{1,m}$ on obtient :

$$\int_{D_{1,m}} \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta_1) dx_1 \dots dx_m \geq A \int_{D_{1,m}} \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta_0) dx_1 \dots dx_m$$

et en sommant sur m on obtient que

$$\sum_{m \geq 1} \int_{D_{1,m}} \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta_1) dx_1 \dots dx_m \geq A \sum_{m \geq 1} \int_{D_{1,m}} \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta_0) dx_1 \dots dx_m \tag{1.7}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
1 - \beta &= \mathbb{P}(\text{Accepter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}) \\
&= \mathbb{P}_{\theta_1}(\exists m \text{ tel que } (X_1, \dots, X_m) \in D_{1,m}) \\
&= \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}_{\theta_1}((X_1, \dots, X_m) \in D_{1,m}) \text{ par } \sigma\text{-additivité,} \\
&= \sum_{m \geq 1} \int_{D_{1,m}} \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta_1) dx_1 \dots dx_m.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}(\text{Accepter } H_1 \mid H_0 \text{ vraie}) \\
&= \sum_{m \geq 1} \int_{D_{1,m}} \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta_0) dx_1 \dots dx_m.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Enfin, en utilisant (1.8) et (1.9), on peut réécrire (1.7) comme suit :

$$1 - \beta \geq A \alpha.$$

D'où $A \leq \frac{1-\beta}{\alpha}$.

▷ Pour démontrer l'inégalité $B \geq \frac{\beta}{1-\alpha}$, on procède de la même manière en considérant les échantillons de type 0. □

Ces inégalités s'avèrent très importantes car elles vont permettre d'éviter le calcul des constantes du test et fournir une approximation suffisante en pratique.

Remarque :

- Lorsque l'on écrit $\mathbb{P}(\text{ Accepter } H_1 | H_1 \text{ vraie}) = 1 - \beta$ on utilise le fait que le test séquentiel s'arrête en un nombre fini d'observations avec une probabilité égale à 1. Plus précisément, on utilise la relation (1.4) pour $\theta = \theta_1$.

- De même en utilisant la relation (1.4) pour $\theta = \theta_0$, on obtient

$$\mathbb{P}(\text{ Accepter } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha.$$

Approximation de A et B

Les inégalités (1.5) du théorème 1.1.2, suggèrent d'approximer A et B respectivement par

$$A^* = \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

et

$$B^* = \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

Remarque :

Les inégalités (1.5) impliquent $B^* < A^*$ car $B < A$. En multipliant cette inégalité par $\alpha(1 - \alpha) > 0$, on obtient après simplification $0 < 1 - \beta - \alpha$.

On en déduit finalement que $A_* > 1$ et $B_* < 1$.

Les risques de première et deuxième espèces pouvant être modifiés par l'approximation, notons α^* et β^* les erreurs de première et deuxième espèces du test $S(A^*, B^*)$ et analysons les conséquences de cette approximation.

Théorème 1.1.3 *Les risques du test $S(A^*, B^*)$ vérifient :*

$$\alpha^* \leq \frac{\alpha}{1 - \beta} \text{ et } \beta^* \leq \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

mais aussi

$$\alpha^* + \beta^* \leq \alpha + \beta.$$

Démonstration :

- En appliquant le théorème 1.1.2 au test $S(A^*, B^*)$, on obtient

$$\frac{1}{A^*} \geq \frac{\alpha^*}{1 - \beta^*}$$

$$B^* \geq \frac{\beta^*}{1 - \alpha^*}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha^*}{1 - \beta^*} \leq \frac{\alpha}{1 - \beta}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\beta^*}{1 - \alpha^*} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}. \quad (1.11)$$

Ce qui implique

$$\alpha^* \leq \frac{\alpha}{1 - \beta},$$

$$\beta^* \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

- Si on multiplie (1.10) par $(1 - \beta)(1 - \beta^*)$ et (1.11) par $(1 - \alpha)(1 - \alpha^*)$, il en découle que

$$(1 - \beta)\alpha^* \leq \alpha(1 - \beta^*),$$

$$(1 - \alpha)\beta^* \leq (1 - \alpha^*)\beta.$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient après simplification :

$$\alpha^* + \beta^* \leq \alpha + \beta. \square$$

Dans la pratique, si α et β sont choisis dans l'intervalle $[0.01; 0.05]$, alors les proportions dans lesquelles α^* peut excéder α et β^* peut excéder β sont très faibles (car $\frac{1}{1 - \beta}$ et $\frac{1}{1 - \alpha}$ sont proches de 1) et peuvent donc être négligées.

Exemple : Si $\alpha = 0.01$ et $\beta = 0.05$, alors $\alpha^* \leq 0.01053$ et $\beta^* \leq 0.05051$.

La deuxième inégalité du théorème 1.1.3 montre que nécessairement une des deux inégalités $\alpha^* \leq \alpha$ et $\beta^* \leq \beta$ est réalisée. En conséquence, l'approximation de A par A^* et de B par B^* conduit au plus à **l'augmentation d'un des risques et cela dans une proportion très faible.**

Cependant cette approximation accroît le nombre d'observations nécessaires au test pour prendre une décision. Mais il est possible de montrer que **l'augmentation du nombre d'observations causée par l'approximation est relativement faible** comme l'illustre la figure FIG. 1.1.

En pratique si le coût d'une nouvelle observation n'est pas trop élevé, si l'on désire obtenir un test séquentiel d'erreur de première espèce inférieure à α et d'erreur de deuxième espèce inférieure à β , on pose $A = \frac{1 - \beta}{\alpha}$, $B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ et on effectue le test de la définition 1.1.1.

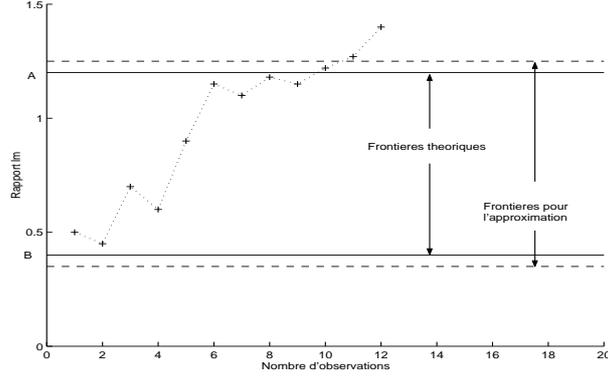


FIG. 1.1 – Augmentation du nombre d'observations

1.1.3 Mise en oeuvre du test séquentiel sur un exemple

On suppose que l'on dispose d'un échantillon de variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ avec σ connu. On veut tester au moyen du TSRP, l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0$.

Si l'on souhaite obtenir un test tel que

$$\mathbb{P}(\text{Rejeter } H_0 \mid H_0) \leq \alpha \text{ et } \mathbb{P}(\text{Accepter } H_0 \mid H_1) \leq \beta,$$

où $\alpha, \beta \in [0,01; 0,05]$, on utilise l'approximation $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ et $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

A l'issue de la m -ième observation :

- on accepte H_0 si $\sum_{i=1}^m Z_i \leq \text{Log}B$,
- on accepte H_1 si $\sum_{i=1}^m Z_i \geq \text{Log}A$,
- on continue le test si $\text{Log}B < \sum_{i=1}^m Z_i < \text{Log}A$,

avec Z_i défini par la relation (1.1).

Or

$$Z_i = \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma^2} X_i - \frac{1}{2\sigma^2} (\theta_1^2 - \theta_0^2).$$

Donc

$$\sum_{i=1}^m Z_i = \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m X_i - \frac{n}{2\sigma^2} (\theta_1^2 - \theta_0^2).$$

Pour résumer :

- on accepte H_0 si

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m X_i - \frac{n}{2\sigma^2} (\theta_1^2 - \theta_0^2) \leq \text{Log} \frac{\beta}{1-\alpha} \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^m X_i \leq \frac{\sigma^2}{(\theta_1 - \theta_0)} [\text{Log} \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{n}{2\sigma^2} (\theta_1^2 - \theta_0^2)] \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^m X_i \leq \frac{\sigma^2}{(\theta_1 - \theta_0)} \text{Log} \frac{\beta}{1-\alpha} + n \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} \stackrel{\text{déf}}{=} a_m \end{aligned}$$

- on accepte H_1 si

$$\begin{aligned} \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m X_i - \frac{n}{2\sigma^2} (\theta_1^2 - \theta_0^2) &\geq \text{Log} \frac{1-\beta}{\alpha} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m X_i &\geq \frac{\sigma^2}{(\theta_1 - \theta_0)} [\text{Log} \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{n}{2\sigma^2} (\theta_1^2 - \theta_0^2)] \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m X_i &\geq \frac{\sigma^2}{(\theta_1 - \theta_0)} \text{Log} \frac{1-\beta}{\alpha} + n \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} r_m \end{aligned}$$

- on prend une observation suppl\'ementaire si

$$a_m < \sum_{i=1}^m X_i < r_m.$$

En pratique on trace les deux droites parall\eles :

$$L_0 : y = \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} x + \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \text{Log} \frac{\beta}{1-\alpha},$$

$$L_1 : y = \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} x + \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \text{Log} \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Ensuite on place sur le m\eme graphique les points de coordonn\ees $(m, \sum_{i=1}^m x_i)$ tant qu'ils sont dans la bande de plan d\'efinie par les deux droites et d\es que l'un des points sort de la bande de plan, on d\'ecide H_0 si L_0 est franchie et H_1 si L_1 est franchie.

Application : Nous avons simul\ee des donn\ees selon plusieurs valeurs du param\etre θ et appliqu\ee le test s\eequentiel d\eecrit ci-dessus. Les figures FIG. 1.2 et FIG. 1.3 repr\esentent les r\esultats obtenus respectivement pour $\theta = 1$ et $\theta = 2$ lorsque $\theta_1 = 2$, $\theta_0 = 1$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0.01$ et $\beta = 0.05$.

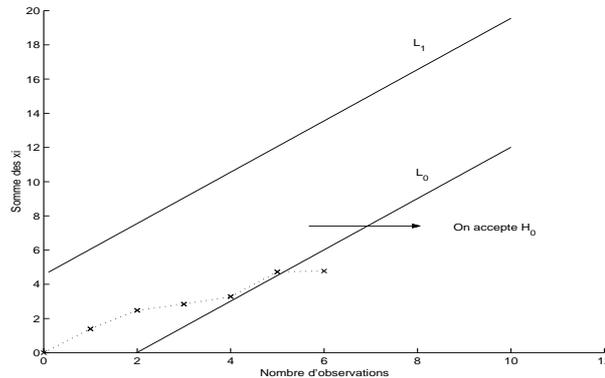


FIG. 1.2 – Représentation du rejet de H_0 ($\theta = 1$)

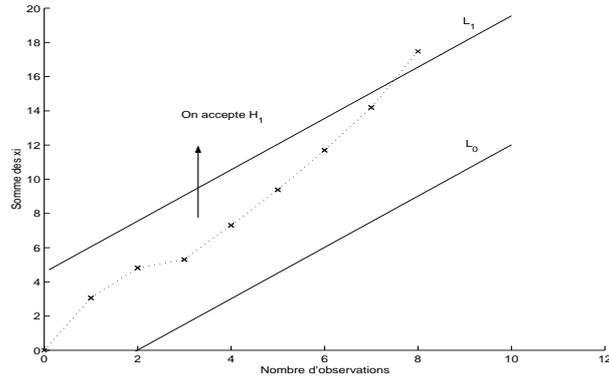


FIG. 1.3 – Représentation de l'acceptation de H_0 ($\theta = 2$)

1.1.4 Fonction d'efficacité et fonction ASN

Nous allons dans ce paragraphe définir la fonction d'efficacité d'un test séquentiel.

Définition 1.1.4 La *fonction d'efficacité* du test séquentiel du rapport des probabilités est la fonction :

$$\theta \mapsto L(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\text{ Accepter } H_0).$$

Dans la mesure où le test séquentiel du rapport des probabilités pour tester une hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre une hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1$ sera appliqué à des valeurs du paramètre $\theta \neq \theta_1$ et $\theta \neq \theta_0$, il est intéressant de calculer la fonction d'efficacité car elle est définie pour toutes les valeurs possibles de θ .

Lemme 1.1.5 Soit Z une variable aléatoire réelle. $f(x)$ désigne la densité de Z au point x si Z est absolument continue ou la probabilité que Z soit égale à x si Z est discrète.

On suppose que $M(u) = \mathbb{E}(e^{uZ})$ existe pour tout $u \in \mathbb{R}$ et qu'il existe un réel $0 < \delta < 1$ tel que

$$\mathbb{P}(e^Z > 1 + \delta) > 0 \text{ et } \mathbb{P}(e^Z < 1 - \delta) > 0.$$

Alors,

(i) Si $\mathbb{E}(Z) > 0$, alors l'équation $M(u) = 1$ admet une unique solution u_0 dans $] -\infty, 0[$.

(ii) Si $\mathbb{E}(Z) < 0$, alors l'équation $M(u) = 1$ admet une unique solution u_0 dans $]0, +\infty[$.

(iii) Si $\mathbb{E}(Z) = 0$, alors l'équation $M(u) = 1$ n'admet pas de solution autre que 0.

Démonstration :

▷ On a supposé que $M(u) < +\infty \forall u$. En appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme, on montre que $M(u)$ est indéfiniment dérivable (propriété des modèles exponentiels). On a

$$\begin{aligned} M'(u) &= \mathbb{E}(Ze^{uZ}) \\ M''(u) &= \mathbb{E}(Z^2e^{uZ}) > 0, \text{ donc } M \text{ est strictement convexe.} \end{aligned}$$

▷ Il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{P}(e^Z > 1 + \delta) > 0$ et $\mathbb{P}(e^Z < 1 - \delta) > 0$.

- Alors pour $u > 0$, on a :

$$\begin{aligned} M(u) &= \mathbb{E}(e^{uZ} \mathbb{1}_{\{e^Z > 1 + \delta\}} + e^{uZ} \mathbb{1}_{\{e^Z \leq 1 + \delta\}}) \\ &\geq \mathbb{E}(e^{uZ} \mathbb{1}_{\{e^Z > 1 + \delta\}}) \\ &\geq (1 + \delta)^u \mathbb{P}(e^Z > 1 + \delta). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{u \rightarrow +\infty} M(u) = +\infty$ car $\mathbb{P}(e^Z > 1 + \delta) > 0$.

- De même pour $u < 0$, on a :

$$\begin{aligned} M(u) &= \mathbb{E}(e^{uZ} \mathbb{1}_{\{e^Z \geq 1 - \delta\}} + e^{uZ} \mathbb{1}_{\{e^Z < 1 - \delta\}}) \\ &\geq \mathbb{E}(e^{uZ} \mathbb{1}_{\{e^Z < 1 - \delta\}}) \\ &\geq (1 - \delta)^u \mathbb{P}(e^Z < 1 - \delta). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{u \rightarrow -\infty} M(u) = +\infty$ car $\mathbb{P}(e^Z < 1 - \delta) > 0$.

On a montré que M est strictement convexe et que $\lim_{u \rightarrow +\infty} M(u) = +\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} M(u) = +\infty$.

On peut alors en déduire que M admet un unique maximum en u^* .

▷ On a $M'(0) = \mathbb{E}(Z)$. On peut alors considérer les trois cas suivants.

(i) Si $\mathbb{E}(Z) > 0$, alors $M'(0) > 0$. On se trouve alors dans la situation représentée par la figure FIG. 1.4.

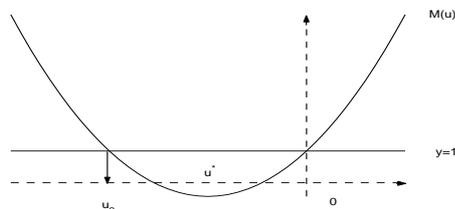


FIG. 1.4 – Représentation de $M(u)$ pour $\mathbb{E}(Z) > 0$

On en déduit l'existence d'un unique $u_0 \in]-\infty, u^*[$ tel que $M(u_0) = 1$ par stricte convexité de M . On a de plus $u_0 < u^* < 0$.

(ii) Si $\mathbb{E}(Z) < 0$, alors $M'(0) < 0$ et on se trouve dans la situation représentée par la figure FIG. 1.5.

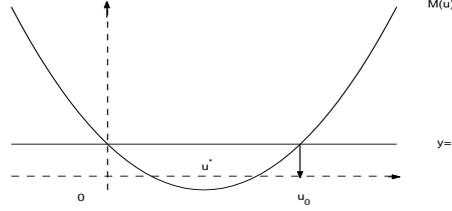


FIG. 1.5 – Représentation de $M(u)$ pour $\mathbb{E}(Z) < 0$

On en déduit de même l'existence d'un unique $u_0 \in]u^*, +\infty[$ tel que $M(u_0) = 1$. De plus u_0 vérifie $u_0 > u^* > 0$.

(iii) Enfin si $\mathbb{E}(Z) = 0$, alors $M'(0) = 0$ ce qui signifie que 0 est le minimum u^* de M . Par unicité du minimum, il n'existe pas $u \neq 0$ vérifiant $M(u) = 1$. \square

Remarque :

La fonction d'efficacité d'un test de constantes associées A et B dépend de ces constantes. Le théorème 1.1.6 explicite cette dépendance par l'approximation dite de **Wald**.

Théorème 1.1.6 *Si Z_1 vérifie les hypothèses du lemme 1.1.5, alors la fonction d'efficacité $L(\theta)$ d'un test séquentiel $S(A,B)$ peut être approximée par la formule suivante*

$$L(\theta) \sim \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}$$

avec $\forall \theta$ $h(\theta)$ est la solution non nulle, si elle existe, zéro sinon, de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} \right)^{h(\theta)} f(x, \theta) dx = 1 \quad (1.12)$$

si Z_1 est absolument continue et de

$$\sum_x \left(\frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} \right)^{h(\theta)} f(x, \theta) = 1$$

si Z_1 est discrète.

Démonstration :

Nous allons faire la démonstration dans le cas où X_1 est absolument continue. Pour le cas discret, à quelques adaptations près, la démonstration est identique.

▷ Pour chaque θ , montrons qu'il existe un unique $h(\theta)$ qui vérifie les hypothèses du théorème. Pour cela considérons la fonction

$$M(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} \right)^u f(x, \theta) dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} M(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u \text{Log} \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)}} f(x, \theta) dx \\ &= \mathbb{E}_\theta(e^{uZ_1}). \end{aligned}$$

Par application du lemme 1.1.5 à la variable aléatoire Z_1 (définie par la relation (1.1)), on obtient l'existence et l'unicité de $h(\theta)$ vérifiant les conditions de la proposition.

▷ Soit θ fixé tel que $h(\theta)$ vérifie la relation (1.11). Alors, la fonction

$$f^*(x, \theta) = \left(\frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} \right)^{h(\theta)} f(x, \theta)$$

apparaît comme une densité.

• Supposons d'abord $h(\theta) > 0$. Posons

H : $f(x, \theta)$ est la densité de X_1 .

H^* : $f^*(x, \theta)$ est la densité de X_1 .

Soit alors S^* le test séquentiel du rapport des probabilités pour tester H contre H^* défini à l'étape m de la manière suivante :

- on continue à faire des observations si

$$B^{h(\theta)} < \frac{f^*(x_1, \theta) \dots f^*(x_m, \theta)}{f(x_1, \theta) \dots f(x_m, \theta)} < A^{h(\theta)},$$

- on accepte H si

$$\frac{f^*(x_1, \theta) \dots f^*(x_m, \theta)}{f(x_1, \theta) \dots f(x_m, \theta)} \leq B^{h(\theta)},$$

- et on accepte H^* si

$$\frac{f^*(x_1, \theta) \dots f^*(x_m, \theta)}{f(x_1, \theta) \dots f(x_m, \theta)} \geq A^{h(\theta)}.$$

Comme $h(\theta) > 0$ et $\frac{f^*(x,\theta)}{f(x,\theta)} = \left(\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right)^{h(\theta)}$ on peut réécrire la règle de décision à l'étape m de la façon suivante :

- on continue à faire des observations si

$$B < \frac{f(x_1, \theta_1) \dots f(x_m, \theta_1)}{f(x_1, \theta_0) \dots f(x_m, \theta_0)} < A,$$

- on accepte H si

$$\frac{f(x_1, \theta_1) \dots f(x_m, \theta_1)}{f(x_1, \theta_0) \dots f(x_m, \theta_0)} \leq B,$$

- et on accepte H^* si

$$\frac{f(x_1, \theta_1) \dots f(x_m, \theta_1)}{f(x_1, \theta_0) \dots f(x_m, \theta_0)} \geq A.$$

Or ces inégalités sont exactement les mêmes que celles du test séquentiel du rapport des probabilités S pour tester H_0 contre H_1 ayant pour constantes A et B .

Si le test S^* accepte H , alors le test S accepte H_0 . Si le test S^* conduit au rejet de H , alors S conduit au rejet de H_0 . Inversement, si le test S accepte H_0 , alors le test S^* accepte H . Si le test S conduit au rejet de H_0 , alors S^* conduit au rejet de H .

On peut alors en déduire que

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \mathbb{P}_\theta(\text{ Accepter } H_0) \\ &= \mathbb{P}_\theta(\text{ Accepter } H) \\ &= \mathbb{P}(\text{ Accepter } H \mid H \text{ est vraie }). \end{aligned}$$

Soient enfin

$$\alpha' = \mathbb{P}(\text{ Rejeter } H \mid H \text{ est vraie }) \text{ et } \beta' = \mathbb{P}(\text{ Accepter } H \mid H^* \text{ est vraie }).$$

D'après le théorème 1.1.3, on peut faire l'approximation

$$A^{h(\theta)} \sim \frac{1-\beta'}{\alpha'}$$

$$B^{h(\theta)} \sim \frac{\beta'}{1-\alpha'}$$

et en déduire que

$$\alpha' \sim \frac{1 - B^{h(\theta)}}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}.$$

Or $\alpha' = 1 - L(\theta)$. Par conséquent, l'approximation de la fonction d'efficacité est donnée par la formule suivante :

$$L(\theta) \sim \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}.$$

• Pour le cas où $h(\theta) < 0$, on obtiendrait exactement la même approximation.

• Enfin lorsque $\theta = \theta^*$ avec $h(\theta^*) = 0$ on approxime $L(\theta)$ par

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta^*} \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}} = \frac{\text{Log}A}{\text{Log}A - \text{Log}B}$$

si h est continue en θ^* . \square

Remarque :

Pour certains points, il est facile de calculer la valeur de la fonction d'efficacité. Par définition de $L(\theta)$, on a $L(\theta_1) = \beta$ et d'après la remarque suivant le théorème 1.1.2, $\mathbb{P}(\text{Accepter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$. Donc $L(\theta_0) = 1 - \alpha$.

Exemple :

On se place à nouveau dans l'exemple d'un échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ avec σ connu.

Si on utilise les approximations A et de B , d'après le théorème 1.1.6, on a la formule d'approximation de la fonction d'efficacité :

$$L(\theta) \sim \frac{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h(\theta)} - 1}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h(\theta)} - \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{h(\theta)}}.$$

Pour l'exemple des lois normales, on obtient

$$\forall \theta, h(\theta) = \frac{\theta_1 + \theta_0 - 2\theta}{\theta_1 - \theta_0}.$$

Par conséquent pour tout θ ,

$$L(\theta) \sim \frac{e^{\frac{\theta_1 + \theta_0 - 2\theta}{\theta_1 - \theta_0} \text{Log} \frac{1-\beta}{\alpha}} - 1}{e^{\frac{\theta_1 + \theta_0 - 2\theta}{\theta_1 - \theta_0} \text{Log} \frac{1-\beta}{\alpha}} - e^{\frac{\theta_1 + \theta_0 - 2\theta}{\theta_1 - \theta_0} \text{Log} \frac{\beta}{1-\alpha}}}.$$

La FIG. 1.6 représente l'approximation la fonction d'efficacité pour un échantillon de loi normale lorsque $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$ et $\theta_1 = 2$, $\theta_0 = 1$.

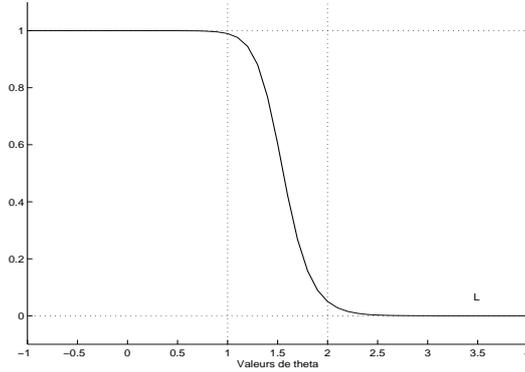


FIG. 1.6 – Approximation de la fonction d'efficacité

Il est possible d'obtenir des renseignements supplémentaires sur le test séquentiel du rapport des probabilités, plus particulièrement sur le nombre d'observations nécessaires pour prendre une décision, en considérant la **fonction ASN (Average Sample Number)**.

Notons N le nombre d'observations nécessaires au test pour prendre une décision. Ce nombre dépend du résultat des observations : il s'agit donc d'une variable aléatoire discrète dont nous noterons n la réalisation.

Comme nous le montrerons dans le paragraphe 1.1.7, la variable aléatoire N admet des moments de tout ordre et en particulier on peut définir la fonction ASN.

Définition 1.1.7 On appelle **fonction ASN** la fonction

$$\theta \mapsto \mathbb{E}_\theta(N).$$

Nous allons exprimer la fonction ASN d'une manière différente afin de pouvoir en donner un approximation dont l'expression sera plus facile à calculer.

Notons $S_n := Z_1 + \dots + Z_n$ avec Z_i défini par la relation (1.1).

Théorème 1.1.8 Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Si $\mathbb{E}_\theta(|Z_1|) < +\infty$, alors

$$\mathbb{E}_\theta(N)\mathbb{E}_\theta(Z_1) = \mathbb{E}_\theta(S_N).$$

Démonstration :

On pose $S_0 := 0$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

On note alors \mathcal{F} la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ et on pose enfin $M_n := S_n - n\mathbb{E}_\theta(Z_1)$.

D'après l'annexe B, $(M_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F} -martingale et N est un \mathcal{F} -temps d'arrêt.

On applique le théorème B.2.1 de l'annexe B à la martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ et au temps d'arrêt N . On peut alors en déduire que $(M_{n \wedge N})_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F} -martingale et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{E}_\theta(M_{n \wedge N}) = \mathbb{E}_\theta(M_0). \quad (1.13)$$

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |M_{n \wedge N}| &\leq |S_{n \wedge N}| + n \wedge N |\mathbb{E}_\theta(Z_1)| \\ &\leq |S_N| + N |\mathbb{E}_\theta(Z_1)| = Y. \end{aligned}$$

Montrons alors que Y est intégrable. Comme N est intégrable (cf paragraphe 1.1.7), il reste à montrer que $|S_N|$ est intégrable. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(|S_N|) &\leq \mathbb{E}_\theta(\sum_{k=1}^N |Z_k|) \\ &= \mathbb{E}_\theta(\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n |Z_k| \mathbb{1}_{\{N=n\}}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\theta(|Z_k| \mathbb{1}_{\{N=n\}}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n \geq k} \mathbb{E}_\theta(|Z_k| \mathbb{1}_{\{N=n\}}) \text{ par le théorème de Fubini-Tonelli,} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\theta(|Z_k| \mathbb{1}_{\{N \geq k\}}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\theta(|Z_k|) \mathbb{P}_\theta(N \geq k) \text{ car } \{N \geq k\} \in \mathcal{F}_{k-1}, \\ &= \mathbb{E}_\theta(N) \mathbb{E}_\theta(|Z_1|) < +\infty \text{ car } \mathbb{E}_\theta(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}_\theta(N \geq k) \end{aligned}$$

Par suite Y est intégrable et on peut passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (1.13) grâce au théorème de convergence dominée et on obtient

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \mathbb{E}_\theta(M_N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}_\theta(S_N - N \mathbb{E}_\theta(Z_1)) = 0. \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}_\theta(S_N) = \mathbb{E}_\theta(N) \mathbb{E}_\theta(Z_1). \square \end{aligned}$$

Théorème 1.1.9 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Si $\text{Var}_\theta(Z_1) < +\infty$, alors*

$$\mathbb{E}_\theta((S_N - N \mathbb{E}_\theta(Z_1))^2) = \mathbb{E}_\theta(N) \text{Var}_\theta(Z_1).$$

Démonstration :

On note $A_n := n \text{Var}_\theta(Z_1)$, $A_0 := 0$ et on pose $W_n := M_n^2 - A_n$ et $W_0 := 0$.

$(W_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F} -martingale d'après l'annexe B. En appliquant le théorème B.2.1, on obtient que $(W_{n \wedge N})_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F} -martingale et vérifie donc

$$\mathbb{E}_\theta(W_{n \wedge N}) = \mathbb{E}_\theta(W_0). \quad (1.14)$$

Comme dans la démonstration précédente, on va passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (1.14). En notant $U_i = Z_i - \mathbb{E}_\theta(Z_1)$, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} & |W_{n \wedge N}| \\ & \leq |M_{n \wedge N}^2| + N \text{var}_\theta(Z_1) \\ & \leq (Z_1 + \dots + Z_N - N\mathbb{E}_\theta(Z_1))^2 + N \text{Var}_\theta(Z_1) \\ & \leq \sum_{j=1}^N U_j^2 + 2 \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} U_i U_j + N \text{Var}_\theta(Z_1) = Y. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que Y est intégrable. De la même manière que dans le théorème 1.1.8 pour montrer que $|S_N|$ est intégrable, on montre que $\sum_{j=1}^N U_j^2$ est intégrable. De plus N admet des moments de tout ordre (cf paragraphe 1.1.7). Il reste donc à montrer que $\sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} U_i U_j$ est intégrable. On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta(|\sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} U_i U_j|) \\ & \leq \mathbb{E}_\theta(\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} |U_i| |U_j| \mathbb{1}_{\{N=n\}}) \\ & = \sum_{i \geq 2} \sum_{n \geq i} \mathbb{E}_\theta(\sum_{j=1}^{i-1} |U_i| |U_j| | N = n) \mathbb{P}_\theta(N = n). \text{ (Tonelli-Fubini)} \end{aligned}$$

En remarquant que pour tout i et j , on a $\mathbb{E}_\theta(|U_i| |U_j|) \leq \text{Var}_\theta(Z_1)$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta(|\sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} U_i U_j|) \\ & \leq \text{Var}_\theta(Z_1) \sum_{i \geq 2} (i-1) \mathbb{P}_\theta(N \geq i) \text{ (Jensen)} \\ & = \text{Var}_\theta(Z_1) (\mathbb{E}_\theta(N^2) - \mathbb{E}_\theta(N)) < +\infty \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}_\theta(N^2) = \sum_{i \geq 1} i \cdot \mathbb{P}_\theta(N \geq i)$ et $\mathbb{E}_\theta(N) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_\theta(N \geq i)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée on obtient exactement que

$$\mathbb{E}_\theta((S_N - N\mathbb{E}_\theta(Z_1))^2) = \mathbb{E}_\theta(N) \text{Var}_\theta(Z_1). \square$$

Maintenant, on est en mesure d'approximer la fonction ASN.

Théorème 1.1.10 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé.*

(i) *Si $\mathbb{E}_\theta(|Z_1|) < +\infty$ et $\mathbb{E}_\theta(Z_1) \neq 0$, alors*

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1 - L(\theta)) \text{Log} A + L(\theta) \text{Log} B}{\mathbb{E}_\theta(Z_1)}.$$

(ii) *Si $\mathbb{E}_\theta(Z_1) = 0$, $\text{Var}_\theta(Z_1) < +\infty$ et $\text{Var}_\theta(Z_1) \neq 0$, alors*

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1 - L(\theta)) (\text{Log} A)^2 + L(\theta) (\text{Log} B)^2}{\text{Var}_\theta(Z_1)}.$$

Démonstration :

(i) Si $\mathbb{E}_\theta(Z_1) < +\infty$ et $\mathbb{E}_\theta(Z_1) \neq 0$, alors d'après le théorème 1.1.8

$$\mathbb{E}_\theta(N) = \frac{\mathbb{E}_\theta(S_N)}{\mathbb{E}_\theta(Z_1)}.$$

Si on néglige les excès $S_N - \text{Log}A$ et $S_N - \text{Log}B$ de S_N au-delà des bornes $\text{Log}A$ et $\text{Log}B$, alors on peut dire que S_N prend approximativement les valeurs $\text{Log}A$ et $\text{Log}B$ avec les probabilités respectives $\mathbb{P}_\theta(S_N \geq \text{Log}A)$ et $\mathbb{P}_\theta(S_N \leq \text{Log}B)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(S_N) &\sim \mathbb{P}_\theta(S_N \geq \text{Log}A) \text{Log}A + \mathbb{P}_\theta(S_N \leq \text{Log}B) \text{Log}B \\ &\sim \mathbb{P}_\theta(\text{ Accepter } H_1) \text{Log}A + \mathbb{P}_\theta(\text{ Accepter } H_0) \text{Log}B \\ &\sim (1 - L(\theta)) \text{Log}A + L(\theta) \text{Log}B. \end{aligned}$$

Et enfin,

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1 - L(\theta)) \text{Log}A + L(\theta) \text{Log}B}{\mathbb{E}_\theta(Z_1)}.$$

(ii) Si $\mathbb{E}_\theta(Z_1) = 0$, $\text{Var}_\theta(Z_1) < +\infty$ et $\text{Var}_\theta(Z_1) \neq 0$, alors par application du théorème 1.1.9 on a

$$\mathbb{E}_\theta(N) = \frac{\mathbb{E}_\theta(S_N^2)}{\text{Var}_\theta(Z_1)}.$$

Toujours en négligeant les excès au delà des bornes, on obtient

$$\mathbb{E}_\theta(S_N^2) \sim (1 - L(\theta)) (\text{Log}A)^2 + L(\theta) (\text{Log}B)^2.$$

Finalement

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1 - L(\theta)) (\text{Log}A)^2 + L(\theta) (\text{Log}B)^2}{\text{Var}_\theta(Z_1)}. \square$$

Exemple :

Reprenons l'exemple d'un échantillon de loi normale $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ avec $\sigma = 1$.

• Déterminons la fonction ASN pour $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_0$. On obtient dans le cas particulier des lois normales :

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(Z_1) = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2 \neq 0$$

et

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(Z_1) = -\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2 \neq 0.$$

En prenant $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ et $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$, grâce au théorème précédent, les approximations de la fonction ASN en θ_0 et θ_1 sont données par :

- sous H_0 $\mathbb{E}_{\theta_0}(N) \sim \frac{\alpha \text{Log}A + (1-\alpha) \text{Log}B}{-\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2}$ car $L(\theta_0) = 1 - \alpha$,

- sous H_1 $\mathbb{E}_{\theta_1}(N) \sim \frac{(1-\beta) \text{Log}A + \beta \text{Log}B}{\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2}$ car $L(\theta_1) = \beta$.

• Pour θ quelconque on a

$$\mathbb{E}_{\theta}(Z_1) = -\frac{1}{2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) + (\theta_1 - \theta_0)\theta$$

et

$$\mathbb{E}_{\theta}(Z_1) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}.$$

Donc pour $\theta \neq \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}$, l'approximation de la fonction ASN est donnée par la formule

$$\mathbb{E}_{\theta}(N) \sim \frac{(1 - L(\theta)) \text{Log}A + L(\theta) \text{Log}B}{(\theta_1 - \theta_0)\theta - \frac{1}{2}(\theta_1^2 - \theta_0^2)}.$$

En utilisant l'approximation de Wald de la fonction d'efficacité, on est en mesure de tracer une approximation de la fonction ASN (FIG. 1.7) pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$, $\theta_0 = 1$ et $\theta_1 = 2$.

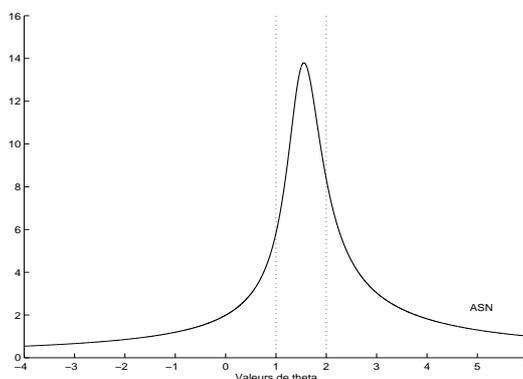


FIG. 1.7 – Approximation de la fonction ASN

1.1.5 Gain de la méthode séquentielle

Nous allons étudier un exemple afin de comparer le test séquentiel du rapport de probabilités à un test classique et constater le gain en nombre d'observations de la méthode séquentielle.

Supposons que l'on dispose d'un échantillon X_1, \dots, X_n (n grand) de variables aléatoires indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(\theta, 1)$. On cherche à tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$ avec $\theta_0 < \theta_1$.

On désire pour cela utiliser un test de niveau α et de puissance $1 - \beta$.

On utilisera tout d'abord un test classique et ensuite on mettra en oeuvre un test séquentiel. Enfin on comparera les deux méthodes au niveau du nombre d'observations nécessaires pour prendre une décision.

- Pour un **test classique** :

Soient donc α et β fixés, on va déterminer $n(\alpha, \beta)$ le nombre d'observations nécessaires pour obtenir une puissance de test égale à $1 - \beta$.

Par application du lemme de Neyman-Pearson, on obtient un test Φ de niveau α et de puissance maximale. Le test Φ s'écrit

$$\Phi = \mathbb{I}_{\{\overline{X}_n > k\}} \text{ où } \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Puisque le test doit être de niveau α et de puissance $1 - \beta$, il doit vérifier les deux équations :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta_0}(\overline{X}_n \leq k) &= 1 - \alpha \\ \mathbb{P}_{\theta_1}(\overline{X}_n \leq k) &= \beta \end{aligned}$$

qui vont nous permettre de déterminer k et $n(\alpha, \beta)$.

D'une part on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta_0}(\overline{X}_n \leq k) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}_{\theta_0}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0) \leq \sqrt{n}(k - \theta_0)) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow \phi(\sqrt{n}(k - \theta_0)) &= 1 - \alpha, \end{aligned}$$

où ϕ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite car $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Et d'autre part on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta_1}(\overline{X}_n \leq k) &= \beta \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}_{\theta_1}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_1) \leq \sqrt{n}(k - \theta_1)) &= \beta \\ \Leftrightarrow \phi(\sqrt{n}(k - \theta_1)) &= \beta. \end{aligned}$$

En notant λ_0 et λ_1 les réels tels que $\phi(\lambda_0) = 1 - \alpha$ et $\phi(\lambda_1) = \beta$, on obtient alors

$$\begin{cases} \lambda_0 &= \sqrt{n}(k - \theta_0) \\ \lambda_1 &= \sqrt{n}(k - \theta_1). \end{cases}$$

Finalement, en résolvant ce système d'équations on obtient

$$\begin{cases} k &= \theta_0 + \sqrt{n}\lambda_0 \\ \sqrt{n} &= \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\theta_1 - \theta_0}. \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$n(\alpha, \beta) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2}.$$

- Pour le **test séquentiel** :

On utilise l'approximation de A par $\frac{1-\beta}{\alpha}$ et l'approximation de B par $\frac{\beta}{1-\alpha}$. D'après le théorème 1.1.10 on a

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1 - L(\theta)) \text{Log}A + L(\theta) \text{Log}B}{\mathbb{E}_\theta(Z_1)}$$

avec $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ et $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Donc

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(N) \sim \frac{\alpha \text{Log}A + (1 - \alpha) \text{Log}B}{\mathbb{E}_{\theta_0}(Z_1)},$$

et

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(N) \sim \frac{(1 - \beta) \text{Log}A + \beta \text{Log}B}{\mathbb{E}_{\theta_1}(Z_1)}.$$

Nous avons vu dans l'exemple précédent que

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(Z_1) = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2 \text{ et } \mathbb{E}_{\theta_0}(Z_1) = -\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2.$$

On a finalement

$$\frac{\mathbb{E}_{\theta_1}(N)}{n(\alpha, \beta)} = \frac{2}{(\lambda_1 - \lambda_0)^2} [\beta \text{Log}B + (1 - \beta) \text{Log}A]$$

et

$$\frac{\mathbb{E}_{\theta_0}(N)}{n(\alpha, \beta)} = -\frac{2}{(\lambda_1 - \lambda_0)^2} [(1 - \alpha) \text{Log}B + \alpha \text{Log}A].$$

On peut remarquer que ces expressions ne dépendent pas de θ_0 et θ_1 .

Pour le test utilisant les approximations les pourcentages moyens d'économie sont

- sous H_0 : $100[1 - \frac{\mathbb{E}_{\theta_0}(N)}{n(\alpha, \beta)}],$

- sous H_1 : $100[1 - \frac{\mathbb{E}_{\theta_1}(N)}{n(\alpha, \beta)}].$

Dans le test séquentiel du rapport des probabilités, on utilise les approximations de A et B , ce qui implique comme nous l'avons vu précédemment une augmentation du nombre d'observations. Donc l'économie obtenue avec les valeurs théoriques ne peut être que supérieur à l'économie obtenue par le test séquentiel utilisant les approximations de A et B .

Application numérique :

$\alpha = 0.01$ et $\beta = 0.05$ d'où $\phi(\lambda_0) = 0.99$ et $\phi(\lambda_1) = 0.05$. En utilisant la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ on trouve $\lambda_0 = 2.33$ et $\lambda_1 = -1.64$.

Le pourcentage d'économie sous H_1 est de l'ordre de **47%** tandis que le pourcentage d'économie sous H_0 est d'environ **63%**.

1.1.6 Preuve que le TSRP s'arrête p.s. et moments de N

Le test séquentiel du rapport des probabilités est défini par récurrence sur le nombre d'observations. On pourrait, a priori, imaginer que le rapport des vraisemblances l_m reste constamment dans l'intervalle $]A, B[$ et que le test ne s'arrête pas. Or il s'avère que presque sûrement $l_m(X_1, \dots, X_m)$ sort de cet intervalle. C'est ce que nous allons démontrer.

Le test s'arrête à l'étape m si m est le plus petit entier tel que

$$Z_1 + \dots + Z_m \geq A \text{ ou } Z_1 + \dots + Z_m \leq B.$$

Posons $c := |LogB| + |LogA|$ et notons les k premières séquences

$$\begin{aligned} \xi_1 &= Z_1 + \dots + Z_r \\ &\vdots \\ \xi_k &= Z_{r(k-1)+1} + \dots + Z_{kr} \text{ où } r \text{ est un entier fixé.} \end{aligned}$$

Lemme 1.1.11 *S'il existe un entier k tel que $|\xi_k| \geq c$, alors le test $S(A, B)$ s'arrête avant ou à la k -ième séquence.*

Démonstration :

Si le test ne s'est pas arrêté à la $(k-1)$ -ième séquence on a :

$$LogB < \xi_1 + \dots + \xi_{k-1} < LogA.$$

- Si $\xi_k \geq c$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \xi_i &\geq LogB + |LogB| + |LogA| \\ &\geq |LogA| \text{ car } LogB + |LogB| \geq 0, \\ &\geq LogA \text{ donc le test s'arrête à la } k\text{-ième séquence.} \end{aligned}$$

- Si $\xi_k \leq -c$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \xi_i &\leq -LogA - |LogB| - |LogA| \\ &\leq -|LogB| \text{ car } LogA - |LogA| \leq 0, \\ &\leq -LogB \text{ donc le test s'arrête à la } k\text{-ième séquence.} \square \end{aligned}$$

Remarque :

Donc s'il existe k tel que $|\xi_k| \geq c$, alors $N \leq kr$ où N est la variable aléatoire représentant le nombre d'observations au moment de la décision.

Théorème 1.1.12 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Si $\text{Var}_\theta(Z_1) < +\infty$ alors le test séquentiel du rapport des probabilités s'arrête en un nombre fini d'observations avec une probabilité égale à 1 pour le paramètre θ .*

Démonstration :

▷ Si le test ne s'arrête pas, on a alors $|\xi_k| < c \forall k \geq 1$ d'après le lemme précédent. Par conséquent,

$$\mathbb{P}_\theta(\text{Le test ne s'arrête pas}) \leq \mathbb{P}_\theta(\forall k \quad |\xi_k|^2 < c^2).$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\theta(\forall k, |\xi_k|^2 < c^2) \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\theta(\forall k = 1, \dots, j, |\xi_k|^2 < c^2) \text{ par continuité inférieure,} \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\theta(|\xi_1|^2 < c^2)^j \text{ car les } \xi_i \text{ sont i.i.d.} \end{aligned}$$

▷ Montrons que $\mathbb{P}_\theta(|\xi_1|^2 < c^2) < 1$, on aura ainsi $\mathbb{P}_\theta(\forall k, |\xi_k|^2 < c^2) = 0$. Si $\mathbb{P}_\theta(|\xi_1|^2 < c^2) = 1$, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_\theta(|\xi_1|^2 \geq c^2) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta(\xi_1^2) \\ &= \mathbb{E}_\theta(\xi_1^2 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 \geq c^2\}} + \xi_1^2 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 < c^2\}}) \\ &= \mathbb{E}_\theta(\xi_1^2 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 \geq c^2\}}) + \mathbb{E}_\theta(\xi_1^2 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 < c^2\}}) < 0 + c^2. \end{aligned}$$

Or on a supposé $\mathbb{E}_\theta(Z_i^2) > 0$, donc il est possible de trouver r tel que $\mathbb{E}_\theta(\xi_1^2) \geq c^2$. Ce qui fournit une contradiction.

Pour ce choix de r , on a $\mathbb{P}_\theta(|\xi_1|^2 < c^2) < 1$ et on peut alors conclure que

$$\mathbb{P}_\theta(\text{Le test s'arrête}) = 1. \square$$

Théorème 1.1.13 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Si $\text{Var}_\theta(Z_1) < +\infty$ alors*

(i) *il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\mathbb{E}_\theta(e^{Nt})$ existe pour tout $t < t_0$,*

(ii) *$\mathbb{E}_\theta(N^k) < +\infty$ pour tout entier $k > 0$.*

Démonstration :

(i) Pour tout réel t , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(e^{tN}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{nt} \mathbb{P}_\theta(N = n) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{rkt} \left(\sum_{j=1}^r e^{jt} \mathbb{P}_\theta(N = kr + j) \right). \end{aligned}$$

En gardant les notations de la démonstration précédente, pour $t \geq 0$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(e^{tN}) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} e^{rkt} e^{rt} \mathbb{P}_\theta(N > kr) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} e^{rkt} e^{rt} \mathbb{P}_\theta(\forall j \leq k, |\xi_j| < c) \\ &\leq e^{rt} \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{rt} \mathbb{P}_\theta(|\xi_1| < c))^k.\end{aligned}$$

De même pour $t \leq 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(e^{tN}) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} e^{rkt} e^t \mathbb{P}_\theta(N > kr) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} e^{rkt} e^t \mathbb{P}_\theta(\forall j \leq k, |\xi_j| < c) \\ &\leq e^t \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{rt} \mathbb{P}_\theta(|\xi_1| < c))^k.\end{aligned}$$

Nous avons vu au cours de la démonstration du théorème précédent qu'il était possible de choisir r de sorte que $\mathbb{P}_\theta(|\xi_1| < c) < 1$. Alors les deux séries géométriques précédentes sont convergentes pour tout $t < t_0$ où

$$t_0 = -\frac{\text{Log } \mathbb{P}_\theta(|\xi_1| < c)}{r} > 0.$$

(ii) Pour tout réel t tel que $0 < t < t_0$ et tout entier $k > 0$ fixés, on peut choisir un n_0 suffisamment grand pour s'assurer que $k \text{ Log } n < nt$ dès que $n \geq n_0$. En conséquence pour $t < t_0$,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} n^k \mathbb{P}_\theta(N = n) < \sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{nt} \mathbb{P}_\theta(N = n) < +\infty.$$

On en déduit donc que $\mathbb{E}_\theta(N^k) < +\infty$ pour tout entier k positif. \square

1.2 Test tronqué

1.2.1 Présentation

Nous avons vu sur un exemple que le test séquentiel du rapport des probabilités est plus économe en nombre d'observations qu'un test classique. On peut alors être tenté d'abandonner les tests classiques au profit des tests séquentiels.

Cependant, le gain obtenu est un gain moyen. On s'expose alors au risque de voir aléatoirement un test nécessiter un échantillon de grande taille pour prendre une décision. De plus comme le montre Wald dans [13], ce gain n'est optimal qu'au voisinage de θ_0 et θ_1 . Il est donc possible que pour certaines valeurs de θ , $\mathbb{E}_\theta(N)$ dépasse $n(\alpha, \beta)$, nombre d'observations d'un test non séquentiel.

C'est pourquoi Wald propose de **tronquer la procédure séquentielle**. Dans ce but, on définit une limite supérieure n_0 pour le nombre d'observations. Si le test séquentiel du rapport des probabilités n'a pas pris de décision pour $m \leq n_0$ on adopte à l'étape n_0 la règle de décision suivante :

- on accepte H_0 si $\text{Log}B < \sum_{i=1}^{n_0} Z_i \leq 0$
- on accepte H_1 si $0 < \sum_{i=1}^{n_0} Z_i < \text{Log}A$.

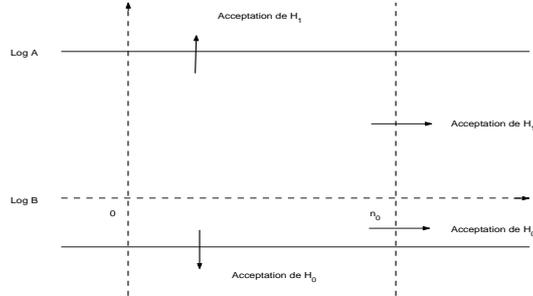


FIG. 1.8 – Fonctionnement du test séquentiel tronqué

Cependant, la troncation du test risque de changer les erreurs de première et deuxième espèces α et β . De plus les effets de la troncation vont dépendre du choix de n_0 .

1.2.2 Majoration des risques du test tronqué

Notons $\alpha(n_0)$ et $\beta(n_0)$ les risques du test tronqué. On notera S le test non tronqué et S_{n_0} le test tronqué en n_0 .

Nous allons majorer les risques de première et deuxième espèces du test tronqué en n_0 .

- Paçons nous sous l'hypothèse H_0 :

Soit $\rho_0(n_0) = \mathbb{P}_{\theta_0}(S_{n_0} \text{ rejette } H_0 \text{ et } S \text{ accepte } H_0)$.

Cette probabilité est la probabilité de l'évènement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n = 1 \dots n_0 - 1 \quad \text{Log}B < \sum_{i=1}^n Z_i < \text{Log}A \\ 0 < \sum_{i=1}^{n_0} Z_i < \text{Log}A \\ \exists k > n_0 \text{ tel que } \sum_{i=1}^k Z_i \leq \text{Log}B \end{array} \right.$$

On va maintenant majorer le risque de première espèce pour le test tronqué.

Théorème 1.2.1 *Le risque de première espèce du test tronqué vérifie*

$$\alpha(n_0) \leq \alpha + \rho_0(n_0).$$

Démonstration :

Soit $\alpha_1 = \mathbb{P}_{\theta_0}(S \text{ rejette } H_0 \text{ avant ou à } n_0)$ et $\alpha_2 = \mathbb{P}_{\theta_0}(S \text{ rejette } H_0 \text{ après } n_0)$.

On a $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

On note $\rho_2(n_0) = \mathbb{P}_{\theta_0}(S_{n_0} \text{ rejette } H_0 \text{ à l'étape } n_0, S \text{ rejette } H_0)$. Il s'agit de la probabilité de l'évènement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n = 1 \dots n_0 - 1 \quad \text{Log}B < \sum_{i=1}^n Z_i < \text{Log}A \\ 0 < \sum_{i=1}^{n_0} Z_i < \text{Log}A \\ \exists k > n_0 \text{ tel que } \sum_{i=1}^k Z_i \geq \text{Log}A. \end{array} \right.$$

On a $\rho_2(n_0) \leq \alpha_2$.

De plus

$$\begin{aligned} \alpha(n_0) &= \mathbb{P}_{\theta_0}(S_{n_0} \text{ rejette } H_0) \\ &= \mathbb{P}_{\theta_0}(S_{n_0} \text{ rejette } H_0 \text{ et } S \text{ accepte } H_0) \\ &\quad + \mathbb{P}_{\theta_0}(S_{n_0} \text{ rejette } H_0 \text{ et } S \text{ rejette } H_0) \\ &= \rho_0(n_0) + \mathbb{P}_{\theta_0}(S \text{ rejette } H_0 \text{ avant } n_0) \\ &\quad + \mathbb{P}_{\theta_0}(S(n_0) \text{ rejette } H_0 \text{ en } n_0, S \text{ rejette } H_0) \\ &= \rho_0(n_0) + \alpha_1 + \rho_2(n_0) \\ &\leq \alpha_1 + \alpha_2 + \rho_0(n_0) = \alpha + \rho_0(n_0). \square \end{aligned}$$

- **Si on se place maintenant sous H_1 :**

Soit $\rho_1(n_0) = \mathbb{P}_{\theta_1}(S_{n_0} \text{ accepte } H_0 \text{ et } S \text{ rejette } H_0)$, la probabilité de l'évènement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n = 1 \dots n_0 - 1 \quad \text{Log}B < \sum_{i=1}^n Z_i < \text{Log}A \\ \text{Log}B < \sum_{i=1}^{n_0} Z_i \leq 0 \\ \exists k > n_0 \text{ tel que } \sum_{i=1}^k Z_i \geq \text{Log}A. \end{array} \right.$$

On obtient la majoration du risque de deuxième espèce pour le test tronqué :

Théorème 1.2.2 *Le risque de deuxième espèce du test tronqué vérifie*

$$\beta(n_0) \leq \beta + \rho_1(n_0).$$

Démonstration :

Identique à la démonstration de la proposition 1.2.1 \square

Cependant, ces bornes peuvent en réalité être largement au-dessus des vraies valeurs de $\alpha(n_0)$ et $\beta(n_0)$.

1.2.3 Méthode directe de Aroian

Pour les tests séquentiels du rapport des probabilités tronqués, les définitions de la fonction d'efficacité et de la fonction ASN sont les mêmes que dans le paragraphe 1.1.4. Cependant les approximations de la fonction d'efficacité donnée par le théorème 1.1.6 et de la fonction ASN donnée par le théorème 1.1.10 ne sont plus valables.

Nous allons décrire dans cette partie une méthode permettant de calculer de manière exacte les valeurs de la fonction d'efficacité et de la fonction ASN pour un TSRP tronqué $S(A,B)$.

Soit donc $\theta \in \Theta$ fixé. Notons

$$\begin{aligned} P_m^0 &:= \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^0), \\ P_m^1 &:= \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^1), \\ C_m &:= \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m) \end{aligned}$$

et supposons que le TSRP $S(A,B)$ est tronqué pour un nombre d'observations égal à m_0 .

- On peut alors écrire la fonction d'efficacité de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \mathbb{P}_\theta(\exists m, (X_1, \dots, X_m) \in D_m^0) \\ &= \mathbb{P}_\theta(\cup_{m=1}^{m_0} \{ (X_1, \dots, X_m) \in D_m^0 \}) \\ &= \sum_{m=1}^{m_0} \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^0) \\ &= \sum_{m=1}^{m_0} P_m^0. \end{aligned}$$

- On peut, de même, écrire la fonction ASN de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(N) &= \mathbb{E}_\theta(\sum_{m=1}^{m_0} m \mathbb{I}_{\{N=m\}}) \\ &= \sum_{m=1}^{m_0} m \mathbb{P}_\theta(N = m) \\ &= \sum_{m=1}^{m_0} m \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^0 \cup D_m^1) \\ &= \sum_{m=1}^{m_0} m (P_m^0 + P_m^1). \end{aligned}$$

La méthode directe consiste à calculer à chaque étape m les probabilités P_m^0 , P_m^1 et C_m .

- A l'étape 1, on a $P_1^0 + P_1^1 + C_1 = 1$. On calcule alors P_1^0 et P_1^1 ou deux quelconques des probabilités parmi P_1^1 , P_1^0 et C_1 et on obtient la troisième grâce à l'égalité.

- A l'étape 2, on a maintenant $P_2^0 + P_2^1 + C_2 = C_1$. Comme à l'étape précédente, on calcule P_2^0 et P_2^1 et on obtient C_2 grâce à l'égalité.

- Enfin à la dernière étape, on a simplement $P_{m_0}^0 + P_{m_0}^1 = C_{m_0-1}$. On calcule $P_{m_0}^0$ et on obtient $P_{m_0}^1$ car C_{m_0} est connu de l'étape précédente.

On choisit ensuite une autre valeurs de θ et on recommence. Lorsque l'on a suffisamment de valeurs, on peut tracer les courbes de la fonction d'efficacité et de la fonction

ASN.

Remarque :

- La méthode directe permet de calculer de manière exacte les valeurs de la fonction d'efficacité. En particulier, elle permet de calculer les valeurs exactes des risques de première et deuxième espèce car $\alpha(m_0) = 1 - L(\theta_0)$ et $\beta(m_0) = L(\theta_1)$.

- La méthode directe marche aussi pour les tests non tronqués. On fait le calcul pour m_0 aussi grand que l'on veut. Cependant les calculs sont longs et on dispose des approximations de Wald qui sont suffisantes en pratique.

Chapitre 2

Application des tests séquentiels au problème du MTBO

Avant d'appliquer les résultats du premier chapitre au problème du MTBO, rappelons tout d'abord le problème dont il s'agit.

Une société veut effectuer un contrôle de qualité sur des capteurs placés au bord de la piste permettant de déterminer la trajectoire de l'avion lors de l'atterrissage.

Malgré la remise en marche instantanée lors d'une interruption dans le fonctionnement du capteur, toute interruption peut avoir de graves conséquences au moment de l'atterrissage. C'est pourquoi cette société désire tester le **MTBO (Mean Time Between Outages)** de l'équipement c'est-à-dire la durée moyenne entre deux interruptions dans le fonctionnement du capteur.

Afin de procéder à la qualification de chaque capteur en un temps minimum, nous allons utiliser le test séquentiel du rapport des probabilités car il va nous permettre de faire une économie d'observations comme nous avons pu le voir dans le premier chapitre.

Les temps de fonctionnement du capteur entre deux interruptions sont supposés indépendants et de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ où $\theta > 0$ est le temps moyen de fonctionnement. On dispose alors d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$, avec $\theta > 0$ de densité

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

dont nous noterons x_1, \dots, x_n les réalisations.

Sur la base de cet échantillon, on souhaite alors tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1$ avec $\theta_1 < \theta_0$. Si H_0 est accepté on dira que l'on accepte le capteur et si H_0 est rejeté on dira que l'on rejette le capteur.

On se fixe au préalable α et β les risques de première et deuxième espèces auxquels on fera souvent référence par le risque du fabricant et le risque du consommateur.

Enfin, on appellera $d := \frac{\theta_0}{\theta_1}$ le **rapport discriminant**.

2.1 Application du TSRP à un échantillon de loi exponentielle

2.1.1 Le test séquentiel du rapport des probabilités

D'après la définition 1.1.1, le test séquentiel du rapport des probabilités de Wald $S(A,B)$ ($B < 1 < A$) a pour règle de décision à l'étape r :

- on continue l'échantillonnage (i.e. laisser fonctionner l'appareil jusqu'à la prochaine interruption) si

$$B < \prod_{i=1}^r \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)} < A$$

$$\Leftrightarrow B < \prod_{i=1}^r \frac{\frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{X_i}{\theta_1}}}{\frac{1}{\theta_0} e^{-\frac{X_i}{\theta_0}}} < A \quad (2.1)$$

$$\Leftrightarrow B < \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r e^{-\sum_{i=1}^r X_i \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)} < A,$$

- on accepte H_0 si

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r e^{-\sum_{i=1}^r X_i \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)} \leq B,$$

- et on rejette H_0 si

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r e^{-\sum_{i=1}^r X_i \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)} \geq A.$$

L'appareil commence à fonctionner au temps $t = 0$. Les instants d'interruption du fonctionnement du matériel sont donc connus. Notons T_i le temps de la i -ème interruption. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n - T_{n-1} = X_n$ et donc le processus $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un processus de Poisson au sens de la définition A.2.5 de l'annexe A.

Notons N la fonction de comptage du processus $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $t > 0$, $N(t)$ représente alors le nombre d'interruptions dans le fonctionnement de l'appareil pendant une durée égale à t . De plus, pour tout $t > 0$, la loi de $N(t)$ est entièrement connue. En effet, d'après la proposition A.2.6, on sait que $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{t}{\theta}$.

A chaque instant t , on connaît donc le nombre d'interruptions survenues pendant une durée égale à t . On va pouvoir modifier le test séquentiel du rapport des probabilités de Wald de façon à tenir compte du fait que **l'information est disponible à temps continu**.

2.1.2 Version continue du test séquentiel du rapport des probabilités

Dans (2.1) on remplace $\sum_{i=1}^r X_i$ par t et r désigne alors le nombre d'interruptions survenues pendant une durée égale à t c'est-à-dire $r = N(t)$.

On peut alors adopter la règle de décision au temps t (ou à l'étape r) :

- on continue l'expérimentation (ie à observer le fonctionnement de l'appareil) si

$$B < \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r e^{-t(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0})} < A, \quad (2.2)$$

- on accepte H_0 si

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r e^{-t(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0})} \leq B,$$

- et on rejette H_0 si

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r e^{-t(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0})} \geq A.$$

On peut réécrire (2.2) de la manière suivante :

$$\frac{\text{Log} \frac{\theta_0}{\theta_1}}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} - \frac{\text{Log} A}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} < t < r \frac{\text{Log} \frac{\theta_0}{\theta_1}}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} - \frac{\text{Log} B}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} \text{ car } \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} > 0.$$

Notons $h_0 := \frac{-\text{Log} B}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} > 0$, $h_1 := \frac{\text{Log} A}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} > 0$ et $s := \frac{\text{Log} \frac{\theta_0}{\theta_1}}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} > 0$.

On obtient ainsi la **version continue du TSRP de Wald** que l'on notera encore $S(A,B)$ et dont la règle de décision au temps t est :

- continuer l'expérimentation si

$$rs - h_1 < t < rs + h_0, \quad (2.3)$$

- accepter H_0 si

$$t \geq rs + h_0$$

- et rejeter H_0 si

$$t \leq rs - h_1.$$

Fonctionnement de la version continue du TSRP

L'expression du test séquentiel donné par la relation (2.3) permet d'effectuer la procédure séquentielle de manière graphique.

Tout d'abord, on trace les deux droites parallèles

$$\begin{aligned} L_1 & : t = rs - h_1, \\ L_0 & : t = rs + h_0. \end{aligned}$$

Ensuite, sur le même graphique, on trace le temps t en fonction du nombre r d'interruptions dans le fonctionnement de l'appareil.

Enfin, on décide H_0 si L_0 est franchie et H_1 si L_1 est franchie.

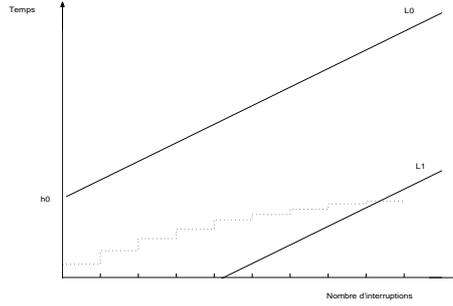


FIG. 2.1 – Représentation du rejet de H_0

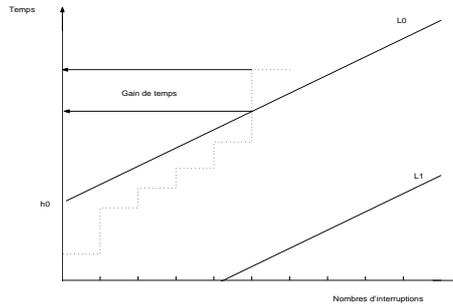


FIG. 2.2 – Représentation de l'acceptation de H_0

Avantages et inconvénients de la version continue

La principale différence entre le TSRP et sa version continue est le fait que lorsque l'on décide H_0 avec la version continue, il n'y a pas d'excès au delà de la frontière L_0 . Ainsi, lorsque le test acceptera H_0 , il le fera en un temps inférieur à celui du TSRP de Wald comme l'illustre la figure FIG. 2.2.

Pour la société qui souhaite qualifier le capteur, le gain de temps à l'acceptation de H_0 autorisé par la version continue du TSRP se traduit, en pratique, par une **économie de temps** mais aussi par une **diminution de ses coûts**. C'est pourquoi, la société préfère l'utilisation de la version continue pour la qualification du capteur.

La version continue du TSRP présente un avantage certain sur le simple TSRP mais il est important de remarquer qu'a priori il ne s'agit plus d'un test séquentiel du rapport des probabilités. Tous les théorèmes du chapitre 1, ne peuvent donc plus être utilisés à moins d'en refaire les démonstrations dans ce cas particulier.

Cependant, on peut réécrire la relation (2.2) sous la forme suivante :

$$B < \frac{\frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t}{\theta_1}}}{r!} < A \Leftrightarrow B < \frac{\mathbb{P}_{\theta_1}(N(t)=r)}{\mathbb{P}_{\theta_0}(N(t)=r)} < A, \quad (2.4)$$

où $(N(t))_{t \geq 0}$ est la fonction de comptage du processus $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

La relation (2.4) nous conduit donc à nous intéresser à un problème général de **décision séquentielle pour des processus à temps continu**.

Dans le paragraphe suivant, nous allons définir le test séquentiel du rapport des probabilités dans le cas où l'échantillon X_1, \dots, X_n, \dots est remplacé par un processus à temps continu $(x(t))_{t \geq 0}$ vérifiant certaines conditions et étudier ses différentes propriétés.

Au travers de la relation (2.4), cette étude va nous permettre de considérer la version continue du TSRP défini par la relation (2.3) comme le test séquentiel du rapport des probabilités du processus à temps continu $(N(t))_{t > 0}$ et d'obtenir une version continue des théorèmes 1.1.2, 1.1.6, 1.1.8, 1.1.9, 1.1.10, 1.1.12 et 1.1.13.

2.2 Problème de décision séquentielle pour des processus à temps continu

Pour définir le TSRP d'un processus à temps continu et déterminer ses propriétés, nous nous sommes basé sur les résultats de Gosh [9].

2.2.1 TSRP d'un processus à temps continu

Soit $(x(t))_{t \geq 0}$ un processus stochastique où $x(t)$ est soit discrète soit absolument continue. Une famille de modèles stochastiques est $\{f_t(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ avec θ ne dépendant pas de t et $f_t(x, \theta)$ la densité de $x(t)$ par rapport à la mesure de Lebesgue si $x(t)$ est absolument continue ou la probabilité que $x(t)$ soit égale à x si $x(t)$ est discrète.

On suppose que l'on peut observer ce processus à temps continu en commençant à $t = 0$. Si x_t est l'observation de $x(t)$ au temps t , les données se présentent sous la forme d'ensembles non dénombrables $\{x_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$ des données accumulées jusqu'à l'instant t . Sur la base de ces données, on désire utiliser un test séquentiel pour tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1$.

Pour simplifier le problème, on va se restreindre au cas où l'ensemble des données $\{x_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$ peut globalement se réduire à x_t à chaque instant t . Nous allons nous limiter aux processus vérifiant la condition suivante :

Condition 1 : $(x(t))$ est continûment exhaustif pour $\{f_t(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, c'est-à-dire

$$\forall 0 \leq \tau < t, f_{\tau, t}(x_\tau, x_t; \theta) = f_t(x_t; \theta)g_\tau(x_\tau | x_t, t)$$

où $g_\tau(x_\tau | x_t, t)$ est une fonction qui ne dépend pas de θ et $f_{\tau, t}(x_\tau, x_t; \theta)$ est la densité conjointe de $(x(\tau), x(t))$.

On peut maintenant introduire la définition du test séquentiel du rapport des probabilités pour des processus vérifiant la condition 1.

Définition 2.2.1 *Le test séquentiel du rapport des probabilités $S(A,B)$ pour tester H_0 contre H_1 est le test dont la règle de décision à l'instant $t \geq 0$ est la suivante :*

- on continue à observer le processus (ie on observe $x(t+0)$) si

$$\text{Log}B < Z(t) < \text{Log}A$$

où

$$Z(t) = \text{Log} \frac{f_t(x(t), \theta_1)}{f_t(x(t), \theta_0)}, \quad (2.5)$$

- on décide H_0 si

$$Z(t) \leq \text{Log}B,$$

- on décide H_1 si

$$Z(t) \geq \text{Log}A.$$

Remarque:

Si $\mathbb{P}_\theta(x(0) = x_0) = 1$, alors $Z_0 := 0$. On choisit alors $B < 1 < A$ car sinon on accepterait H_0 systématiquement.

Le TSRP du chapitre 1 basait sa décision sur toutes les observations passées et l'observation courante. La condition 1 permet de baser la décision du test à temps continu uniquement sur la dernière observation. Le test $S(A,B)$ ainsi défini peut alors être vu comme une **généralisation de la définition 1.1.1 du cas discret au cas continu**.

• Comme dans le chapitre 1, on peut définir les trois régions du test séquentiel au temps t :

- D_t^1 la région de rejet,
- D_t^0 la région d'acceptation,
- D_t la région de continuation.

D_t^1 est l'ensemble des observations conduisant à décider H_1 . On a alors $Z_t \in D_t^1$ si

$$\forall \tau < t, B < Z_\tau < A \text{ et } Z_t \geq A.$$

D_t^0 est l'ensemble des observations conduisant à décider H_0 . On a alors $Z_t \in D_t^0$ si

$$\forall \tau < t, B < Z_\tau < A \text{ et } Z_t \leq B.$$

D_t est l'ensemble des observations conduisant à continuer l'observation du processus $(Z(t))_{t \geq 0}$. Donc $Z_t \in D_t$ si

$$\forall \tau \leq t, B < Z_\tau < A.$$

- De la même manière que dans le chapitre 1, on se fixe les risques de première et deuxième espèces α et β et les constantes A et B sont déterminées de sorte que le test ait pour risques de première et deuxième espèces α et β .

- On note T le moment où le test prend une décision. Comme T dépend de l'observation courante $x(t)$, il s'agit d'une variable aléatoire. La fonction ASN défini au chapitre 1 est alors remplacée par la fonction **AST (Average Sampling Time)**.

Définition 2.2.2 *Si T est intégrable pour tout $\theta \in \Theta$, alors la fonction AST est la fonction*

$$\theta \mapsto \mathbb{E}_\theta(T).$$

Remarque :

Cependant pour tout phénomène où $x(t)$ est une fonction de comptage, il est courant d'appeler fonction ASN la fonction

$$\theta \mapsto \mathbb{E}_\theta(x(T)).$$

Nous allons maintenant étudier les différentes propriétés de ce nouveau test.

2.2.2 Propriétés du TSRP d'un processus à temps continu

Afin de pouvoir déterminer les propriétés de ce nouveau test, nous allons faire une hypothèse supplémentaire. Nous nous limiterons aux processus vérifiant en plus de la condition 1, la condition suivante :

Condition 2 : *Le processus $\{Z(t), t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants stationnaires et vérifie $\mathbb{P}_\theta(Z(0) = 0) = 1$ pour tout $\theta \in \Theta$.*

La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'un processus vérifie les conditions 1 et 2.

Proposition 2.2.3 *Si le processus $\{x(t), t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants stationnaires tel que $\mathbb{P}_\theta(x(0) = x_0) = 1$ pour tout $\theta \in \Theta$ et vérifie la condition 1 alors il vérifie aussi la condition 2.*

Démonstration :

- En notant Z_t la réalisation de $Z(t)$, pour tout $0 \leq t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned} Z_{t_2} - Z_{t_1} &= \text{Log} \frac{f_{t_2}(x_{t_2}; \theta_1)}{f_{t_2}(x_{t_2}; \theta_0)} - \text{Log} \frac{f_{t_1}(x_{t_1}; \theta_1)}{f_{t_1}(x_{t_1}; \theta_0)} \\ &= \text{Log} \frac{f_{t_2}(x_{t_2}; \theta_1) f_{t_1}(x_{t_1}; \theta_0)}{f_{t_2}(x_{t_2}; \theta_0) f_{t_1}(x_{t_1}; \theta_1)}. \end{aligned}$$

Or grâce à la condition 1, on a pour tout $\theta \in \Theta$,

$$f_{t_1, t_2}(x_{t_1}, x_{t_2}; \theta) = f_{t_2}(x_{t_2}; \theta) g_{t_2}(x_{t_1} | x_{t_2}, t_2).$$

De plus si $h(y; \theta)$ désigne la densité de $x(t_2) - x(t_1)$ au point y , on a

$$f_{t_1, t_2}(x_1, x_2; \theta) = f_{t_1}(x_1; \theta) \cdot h(x_2 - x_1; \theta).$$

On peut donc écrire

$$Z_{t_2} - Z_{t_1} = \log \frac{h(x_{t_2} - x_{t_1}; \theta_1)}{h(x_{t_2} - x_{t_1}; \theta_0)}.$$

- Comme $h(y; \theta)$ ne dépend de (t_1, t_2) qu'à travers $t_2 - t_1$. $Z(t_2) - Z(t_1)$ est une fonction de $x(t_2) - x(t_1)$, $t_2 - t_1$, θ_1 et θ_0 .

Puisque la distribution de $x(t_2) - x(t_1)$ ne dépend que de $t_2 - t_1$, on peut en déduire qu'il en est de même pour $Z(t_2) - Z(t_1)$.

- Enfin si l'on considère $t_3 > t_2$, $x(t_3) - x(t_2)$ et $x(t_2) - x(t_1)$ sont indépendants et donc $Z(t_3) - Z(t_2)$ et $Z(t_2) - Z(t_1)$ le sont aussi. \square

Afin de démontrer une version continue des théorèmes 1.1.6, 1.1.8, 1.1.9, 1.1.12 et 1.1.13 nous allons utiliser une méthode générale qui consiste à discrétiser le temps de façon à pouvoir utiliser les théorèmes du chapitre 1.

Méthode générale de démonstration

- Dans un premier temps, on se fixe un réel $\delta_\tau > 0$ (petit) et on ne considère que les multiples $\{n\delta_\tau, n \in \mathbb{N}^*\}$ de δ_τ comme valeurs possibles du temps.

- Ensuite, pour $i \in \mathbb{N}^*$ on définit,

$$Z_i(\delta_\tau) := Z(i\delta_\tau) - Z((i-1)\delta_\tau). \quad (2.6)$$

D'après la condition 2, la suite $(Z_i(\delta_\tau))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Pour tout temps $t = n\delta_\tau$ multiple de δ_τ , on peut écrire

$$Z(n\delta_\tau) = Z(t) = \sum_{i=1}^n Z_i(\delta_\tau). \quad (2.7)$$

- On définit alors le test séquentiel $S_{\delta_\tau}(A, B)$, de constantes A et B , dont le fonctionnement à l'étape m est le suivant :

- on prend une observation supplémentaire si

$$\text{Log} B < Z(m\delta_\tau) < \text{Log} A, \quad (2.8)$$

- on décide H_0 si

$$Z(m\delta_\tau) \leq \text{Log}B$$

- et on décide H_1 si

$$Z(m\delta_\tau) \geq \text{Log}A.$$

Il ne s'agit pas d'un test séquentiel du rapport des probabilités au sens de la définition 1.1.1 mais on peut quand même lui appliquer les théorèmes du chapitre précédent en remplaçant S_n et $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ respectivement par $Z(n\delta_\tau)$ et $(Z_i(\delta_\tau))_{i \in \mathbb{N}^*}$ car la suite $(Z_i(\delta_\tau))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables i.i.d.

Si on note $N(\delta_\tau)$ le nombre d'observations nécessaires au test $S_{\delta_\tau}(A,B)$ pour prendre une décision, on pourra remarquer que le moment T où le test $S(A,B)$ prend une décision vérifie la relation

$$\delta_\tau (N(\delta_\tau) - 1) \leq T \leq \delta_\tau N(\delta_\tau). \quad (2.9)$$

- Enfin, on fait tendre δ_τ vers 0 (si cela est nécessaire).

En utilisant cette méthode, on peut démontrer les théorèmes 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 et 2.3.9 versions continues des théorèmes 1.1.6, 1.1.8, 1.1.9, 1.1.12 et 1.1.13. Pour illustrer la méthode, nous avons démontré le théorème 2.3.6.

Théorème 2.2.4 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Si $\text{Var}_\theta(Z(1)) \neq 0$, alors le test séquentiel du rapport des probabilités s'arrête presque sûrement en un temps fini sous le paramètre θ .*

Théorème 2.2.5 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Supposons que $\text{Var}_\theta(Z(1)) \neq 0$. Alors*

- (i) *il existe un réel $u_0 > 0$ tel que $\mathbb{E}_\theta(e^{Tu}) < +\infty$ pour tout $u < u_0$,*
- (ii) *$\mathbb{E}_\theta(T^k) < +\infty$ pour tout entier $k > 0$.*

Théorème 2.2.6 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Si $\mathbb{E}_\theta(|Z(1)|) < +\infty$, alors*

$$\mathbb{E}_\theta(T)\mathbb{E}_\theta(Z(1)) = \mathbb{E}_\theta(Z(T)).$$

Démonstration :

▷ On se fixe donc $\delta_\tau > 0$ et on note $N(\delta_\tau)$ le nombre d'observations nécessaires au test $S_{\delta_\tau}(A,B)$ pour prendre une décision.

On peut appliquer la proposition 1.1.8 à $Z_i(\delta_\tau)$ et à $Z(n\delta_\tau)$ (définis par les relations 2.6 et 2.7) à la place de Z_i et de S_n car les $Z_i(\delta_\tau)$ sont i.i.d. On obtient la relation

$$\mathbb{E}_\theta(N(\delta_\tau))\mathbb{E}_\theta(Z(\delta_\tau)) = \mathbb{E}_\theta(Z(N(\delta_\tau)\delta_\tau)),$$

que l'on peut réécrire de la manière suivante

$$\mathbb{E}_\theta(N(\delta_\tau)\delta_\tau)\mathbb{E}_\theta\left(\frac{Z(\delta_\tau)}{\delta_\tau}\right) = \mathbb{E}_\theta(Z(N(\delta_\tau)\delta_\tau)). \quad (2.10)$$

▷ Nous allons faire tendre δ_τ vers 0.

- Nous avons vu que $(N(\delta_\tau) - 1)\delta_\tau < T \leq N(\delta_\tau)\delta_\tau$. De manière plus précise, $(N(\delta_\tau)\delta_\tau)$ est une suite décroissante positive telle que

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} N(\delta_\tau)\delta_\tau = T \text{ p.s.}$$

Donc

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \mathbb{E}_\theta(N(\delta_\tau)\delta_\tau) = \mathbb{E}_\theta(T).$$

- Puisque $(N(\delta_\tau)\delta_\tau)$ est une suite décroissante de variables aléatoires presque sûrement finies convergeant vers T , on sait d'après la proposition A.2.4 que la suite $(Z(N(\delta_\tau)\delta_\tau))$ est décroissante et vérifie

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} Z(N(\delta_\tau)\delta_\tau) = Z(T) \text{ p.s.}$$

et donc

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \mathbb{E}_\theta(Z(N(\delta_\tau)\delta_\tau)) = \mathbb{E}_\theta(Z(T)).$$

- Démontrons enfin que $\mathbb{E}_\theta(Z(\delta_\tau)) = \delta_\tau \mathbb{E}_\theta(Z(1))$. Soient $0 < s < t$. On a alors

$$\mathbb{E}_\theta(Z(t+s) - Z(s)) = \mathbb{E}_\theta(Z(t) - Z(0))$$

et grâce à la condition 2, on peut en déduire que

$$\mathbb{E}_\theta(Z(t+s)) = \mathbb{E}_\theta(Z(t)) + \mathbb{E}_\theta(Z(s)).$$

Il suit alors que $\mathbb{E}_\theta(Z(\delta_\tau)) = \delta_\tau \mathbb{E}_\theta(Z(1))$.

- En faisant tendre δ_τ vers 0 dans (2.10), on obtient

$$\mathbb{E}_\theta(T)\mathbb{E}_\theta(Z(1)) = \mathbb{E}_\theta(Z(T)). \square$$

Théorème 2.2.7 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé. Si $\text{Var}(Z(1)) < +\infty$, alors*

$$\mathbb{E}_\theta((Z(T) - T\mathbb{E}_\theta(Z(1)))^2) = \mathbb{E}_\theta(T)\text{Var}(Z(1)).$$

Les théorèmes 2.3.6 et 2.3.7 permettent de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.2.8 *Soit $\theta \in \Theta$ fixé.*

(i) *Si $\mathbb{E}_\theta(|Z(1)|) < +\infty$ et $\mathbb{E}_\theta(Z(1)) \neq 0$, alors*

$$\mathbb{E}_\theta(T) \sim \frac{(1 - L(\theta)) \text{Log}A + L(\theta) \text{Log}B}{\mathbb{E}_\theta(Z(1))}.$$

(ii) *Si $\mathbb{E}_\theta(Z(1)) = 0$, $\text{Var}_\theta(Z(1)) < +\infty$ et $\text{Var}_\theta(Z(1)) \neq 0$, alors*

$$\mathbb{E}_\theta(T) \sim \frac{(1 - L(\theta)) (\text{log}A)^2 + L(\theta) (\text{Log}B)^2}{\text{Var}_\theta(Z(1))}.$$

Démonstration :

Elle se fait de la même manière que la démonstration 1.1.9 en négligeant les excès $Z(T) - \text{Log}A$ et $Z(T) - \text{Log}B$ de $Z(T)$ au-delà des bornes $\text{Log}A$ et $\text{Log}B$ en utilisant les théorèmes 2.2.6 et 2.3.7. \square

Enfin, on peut démontrer l'approximation de Wald pour la fonction d'efficacité d'un TSRP dans sa version continue.

Théorème 2.2.9 *Si $Z(1)$ vérifie les hypothèses du lemme 1.1.5, alors la fonction d'efficacité $L(\theta)$ du test séquentiel $S(A,B)$ peut être approximée par la formule suivante*

$$L(\theta) \sim \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}$$

avec $\forall \theta$ $h(\theta)$ est la solution non nulle, si elle existe, zéro sinon, de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f_1(x, \theta_1)}{f_1(x, \theta_0)} \right)^{h(\theta)} f_1(x, \theta) dx = 1$$

si $Z(1)$ est absolument continue et de

$$\sum_x \left(\frac{f_1(x, \theta_1)}{f_1(x, \theta_0)} \right)^{h(\theta)} f_1(x, \theta) = 1$$

si $Z(1)$ est discrète.

2.2.3 Application au processus de Poisson

Nous allons appliquer les résultats du paragraphe précédent au processus $(N(t))_{t \geq 0}$. D'après la relation (2.4), on obtiendra toutes les propriétés du test $S(A,B)$ défini par la relation (2.3) que l'on souhaite utiliser pour résoudre le problème de qualification décrit dans le premier paragraphe.

Vérifions tout d'abord que le processus $(N(t))_{t \geq 0}$ vérifie les conditions 1 et 2.

- D'après la proposition A.2.7, $(N(t))_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants stationnaires et $\mathbb{P}_\theta(N(0) = 0) = 1$.

- D'après la proposition 2.2.3, il suffit de vérifier que $(N(t))_{t \geq 0}$ satisfait la condition 1. Soient $0 \leq \tau < t$,

$$\begin{aligned} f_{\tau,t}(x_\tau, x_t; \theta) &= \mathbb{P}_\theta(N(\tau) = x_\tau, N(t) = x_t) \\ &= \mathbb{P}_\theta(N(t) = x_t \mid N(\tau) = x_\tau) \mathbb{P}_\theta(N(\tau) = x_\tau). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\theta(N(t) = x_t \mid N(\tau) = x_\tau) \\ &= \mathbb{P}_\theta(N(t) - N(\tau) = x_t - x_\tau \mid N(\tau) = x_\tau) \\ &= \mathbb{P}_\theta(N(t) - N(\tau) = x_t - x_\tau) \text{ par indépendance des accroissements,} \\ &= e^{-\frac{1}{\theta}(t-\tau)} \frac{(\frac{1}{\theta}(t-\tau))^{x_t - x_\tau}}{(x_t - x_\tau)!} \text{ pour } x_\tau = 1, 2, \dots, x_t. \end{aligned}$$

En conséquence

$$f_{\tau,t}(x_\tau, x_t; \theta) = e^{-\frac{1}{\theta}(t-\tau)} \frac{\left(\frac{1}{\theta}(t-\tau)\right)^{x_t-x_\tau}}{(x_t-x_\tau)!} \cdot e^{-\frac{\tau}{\theta}} \frac{\left(\frac{\tau}{\theta}\right)^{x_\tau}}{x_\tau!}.$$

Donc

$$\begin{aligned} g_\tau(x_t, x_\tau; \theta) &= \frac{f_{\tau,t}(x_\tau, x_t; \theta)}{f_t(x_t; \theta)} \\ &= \frac{x_t!}{x_\tau!(x_t-x_\tau)!} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{x_\tau} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{x_t-x_\tau}. \end{aligned}$$

ne dépend pas de θ , ce qui signifie que $(N(t))_{t>0}$ vérifie l'hypothèse 1.

On peut alors appliquer le test séquentiel du rapport des probabilités de la définition 2.3.1 au processus $(N(t))_{t \geq 0}$. Le processus $(Z(t))_{t \geq 0}$ intervenant dans la définition du test $S(A, B)$ est dans ce cas :

$$\begin{aligned} Z(t) &= \log \frac{f_t(N(t); \theta_1)}{f_t(N(t); \theta_0)} \\ &= N(t) \text{Log} \frac{\theta_0}{\theta_1} - t \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right). \end{aligned}$$

Nous allons appliquer les théorèmes de la partie précédente afin de démontrer les différentes propriétés du test $S(A, B)$ défini par la relation (2.4), puis nous déterminerons une approximation des bornes A et B .

Approximation de Wald de la fonction d'efficacité

Selon le théorème 2.2.9, l'approximation de Wald de la fonction d'efficacité du test séquentiel $S(A, B)$ défini par la relation (2.2) est donnée par la formule

$$L(\theta) \sim \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}} =: L^*(\theta),$$

avec $h(\theta)$ solution de

$$\theta = \frac{\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{h(\theta)} - 1}{h(\theta) \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}. \quad (2.11)$$

Approximation de la fonction AST

D'après le théorème 2.3.5, T admet des moments de tout ordre, en particulier la fonction AST est bien définie et on va pouvoir en donner une approximation.

Puisque $N(1)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{\theta}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(Z(1)) &= \mathbb{E}_\theta(N(1)\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1} - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)) \\ &= \frac{1}{\theta}\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1} - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right), \\ \mathbb{E}_\theta(Z(1)^2) &= \mathbb{E}_\theta((N(1)\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1} - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right))^2) \\ &= \frac{1}{\theta}(1 + \frac{1}{\theta})(\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1})^2 + \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)^2 - \frac{2}{\theta}\text{Log}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right).\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(Z(1)) = 0 &\Leftrightarrow \theta = s, \\ \text{Var}_s(Z(1)) &= \text{Log}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right).\end{aligned}$$

où s a été défini au paragraphe 2.2.1.

D'après le théorème 2.3.8, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(T) &\sim \frac{\text{Log}A(1 - L(\theta)) + \text{Log}BL(\theta)}{\frac{1}{\theta}\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1} - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)} \text{ pour } \theta \neq s, \\ \mathbb{E}_\theta(T) &\sim \frac{(\text{Log}A)^2(1 - L(\theta)) + (\text{Log}B)^2L(\theta)}{\text{Log}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)} \text{ pour } \theta = s.\end{aligned}$$

Si maintenant on utilise l'approximation de Wald de la fonction d'efficacité donnée par le théorème 2.2.9, l'approximation de la fonction AST est donnée par les formules suivantes

$$\mathbb{E}_\theta(T) \sim \frac{\text{Log}A(1 - L^*(\theta)) + \text{Log}BL^*(\theta)}{\frac{1}{\theta}\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1} - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)} \text{ pour } \theta \neq s, \quad (2.12)$$

$$\mathbb{E}_\theta(T) \sim \frac{-\text{Log}A \cdot \text{Log}B}{\text{Log}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)} \text{ pour } \theta = s. \quad (2.13)$$

Approximation de la fonction ASN

Comme nous l'avons fait remarquer, puisque $N(t)$ est une fonction de comptage, pour le problème qui nous concerne, la fonction ASN est la fonction

$$\theta \mapsto \mathbb{E}_\theta(N(T)).$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(Z(T)) &= \mathbb{E}_\theta(N(T)\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1} - T\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)) \\ &= \mathbb{E}_\theta(N(T))\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1} - \mathbb{E}_\theta(T)\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right).\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.3.6, on a

$$\mathbb{E}_\theta(T) = \frac{\mathbb{E}_\theta(Z(T))}{\mathbb{E}_\theta(Z(1))}.$$

On peut alors en déduire que

$$\mathbb{E}_\theta(T) = \theta \mathbb{E}_\theta(N(T)).$$

Les relations (2.8) et (2.9) nous donnent alors

$$\mathbb{E}_\theta(Z(T)) \sim \frac{\text{Log}A(1 - L^*(\theta)) + \text{Log}BL^*(\theta)}{\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1} - \theta \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right)} \text{ pour } \theta \neq s,$$

$$\mathbb{E}_\theta(Z(T)) \sim \frac{-\text{Log}A.\text{Log}B}{(\text{Log}\frac{\theta_0}{\theta_1})^2} \text{ pour } \theta = s.$$

Détermination des constantes A et B

Les risques de première et deuxième espèces α et β du test séquentiel $S(A,B)$ étant fixés, les constantes A et B sont déterminées en théorie de façon à ce que le test ait α et β pour risques de première et deuxième espèces. En pratique, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, on détermine des approximations de A et B . Pour le processus de Poisson, en s'appuyant sur l'article [5] de Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz, nous allons pouvoir calculer exactement la borne B et donner une approximation de la borne A .

Théorème 2.2.10 *Les constantes A et B de $S(A,B)$ vérifient*

$$B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

et

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} \cdot \frac{1 - \beta}{\alpha} \leq A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

Démonstration :

▷ Nous avons montré que le test séquentiel du rapport des probabilités dans sa version continue prend une décision en un temps fini pour tout paramètre θ . Comme dans le chapitre 1, on peut en déduire que pour tout θ

$$\mathbb{P}_\theta(\text{ Accepter } H_0) + \mathbb{P}_\theta(\text{ Accepter } H_1) = 1.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\text{ Accepter } H_1) = 1 - \beta,$$

et

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\text{ Accepter } H_0) = 1 - \alpha.$$

▷ On se place dans le cas de l'acceptation de H_1 et on obtient

$$e^{\inf_t Z_t} \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \leq e^{\sup_t Z_t},$$

où \inf_t et \sup_t sont pris sur l'ensemble des observations Z_t de $Z(t)$ telles que le test se termine au temps t par l'acceptation de H_1 .

Pour cela on se fixe δ_τ et on note $D_m^1(\delta_\tau)$, $D_m^0(\delta_\tau)$ et $D_m(\delta_\tau)$ les régions du test $S_{\delta_\tau}(A, B)$ défini par la relation (2.8).

D'une part, on a

$$e^{\inf_t Z_t} \leq \mathbb{E}_{\theta_0}(e^{Z(m\delta_\tau)} \mid S_{\delta_\tau}(A, B) \text{ accepte } H_1) \leq e^{\sup_t Z_t}.$$

D'autre part, on a

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(e^{Z(N(\delta_\tau)\delta_\tau)} \mid S_{\delta_\tau}(A, B) \text{ accepte } H_1) = \frac{\mathbb{P}_{\theta_1}(\exists n \mid Z(n\delta_\tau) \in D_n^1(\delta_\tau))}{\mathbb{P}_{\theta_0}(\exists n \mid Z(n\delta_\tau) \in D_n^1(\delta_\tau))}.$$

De plus

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_{\theta_1}(\exists n \mid Z(n\delta_\tau) \in D_n^1(\delta_\tau))}{\mathbb{P}_{\theta_0}(\exists n \mid Z(n\delta_\tau) \in D_n^1(\delta_\tau))} = \frac{\mathbb{P}_{\theta_1}(\exists t \mid Z(t) \in D_t^1)}{\mathbb{P}_{\theta_0}(\exists t \mid Z(t) \in D_t^1)} = \frac{\mathbb{P}_{\theta_1}(\text{Accepter } H_1)}{\mathbb{P}_{\theta_0}(\text{Accepter } H_1)}.$$

Par conséquent,

$$e^{\inf_t Z_t} \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \leq e^{\sup_t Z_t}.$$

Lorsque H_1 est acceptée suite à l'observation de Z_t , $Z_t \geq \text{Log} A$ et donc

$$\frac{1 - \beta}{\alpha} \geq e^{\inf_t Z_t} \geq A.$$

D'après la proposition A.2.4, $N(t) - N(t - 0) \leq 1$ p.s. et $\text{Log} \frac{\theta_0}{\theta_1} > 0$ donc

$$Z(t) - Z(t - 0) = (N(t) - N(t - 0)) \text{Log} \frac{\theta_0}{\theta_1} \leq \text{Log} \frac{\theta_0}{\theta_1} \text{ p.s.}$$

Si l'observation Z_t conduit à accepter H_1 , $Z_\tau < \text{Log} A$ pour $\tau < t$ et donc

$$\frac{1 - \beta}{\alpha} \leq e^{\sup_t Z_t} \leq \frac{\theta_0}{\theta_1} A.$$

▷ On se place dans le cas de l'acceptation de H_0 et on obtient de la même manière

$$e^{\inf_t Z_t} \leq \frac{\mathbb{P}_{\theta_1}(\text{Accepter } H_0)}{\mathbb{P}_{\theta_0}(\text{Accepter } H_0)} \leq e^{\sup_t Z_t},$$

où \inf_t et \sup_t sont pris sur l'ensemble des observations Z_t de $Z(t)$ telles que le test se termine au temps t par l'acceptation de H_0 .

Lorsque l'observation Z_t conduit à l'acceptation de H_0 , $Z_t \leq \text{Log}B$. Donc $e^{\text{sup}_t Z_t} \leq B$ et

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \leq B.$$

De plus $Z(t) - Z(t-0) \geq 0$ p.s., car $N(t) - N(t-0) \geq 0$ p.s. d'après la proposition A.2.4. D'où $e^{\text{inf}_t Z_t} \geq B$ et donc

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \geq B. \square$$

La borne B est connue et la vraie valeur de A se situe dans l'intervalle

$$\left[\frac{1-\beta}{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_0}, \frac{1-\beta}{\alpha} \right]$$

On choisit alors d'approximer A par le milieu de cet intervalle :

$$A^* := \frac{1-\beta}{\alpha} \frac{d+1}{2d},$$

où d a été défini au paragraphe 2.1.

Application :

Les capteurs que la société veut qualifier sont considérés comme acceptables si la valeur θ de leur MTBO est supérieure ou égale à une valeur donnée $\theta_0 = 4000$ heures et les risques du consommateur et du fabricant sont fixés à $\alpha = 0.2$.

Sur la base des données obtenues par l'observation des interruptions dans le fonctionnement du capteur dans le temps, on teste alors l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0 = 4000$ heures contre l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1 = 2000$ heures au moyen de la procédure $S(A^*, B)$ décrite ci-dessus.

Pour illustrer la procédure nous avons simulé des données selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ pour différentes valeurs du MTBO θ et effectué le test séquentiel défini par la relation (2.3). Les figures FIG. 2.3 et FIG. 2.4 représentent les résultats obtenus pour $\theta = 2000$ heures et $\theta = 4000$ heures lorsque $\theta_0 = 4000$, $\theta_1 = 2000$, $\alpha = \beta = 0.2$.

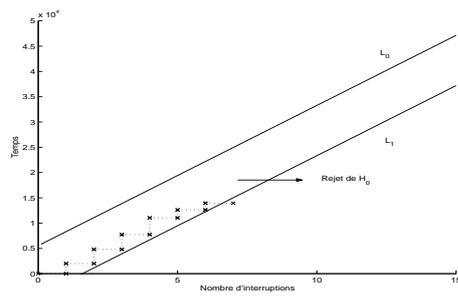


FIG. 2.3 – Rejet de H_0 ($\theta = 2000$ heures)

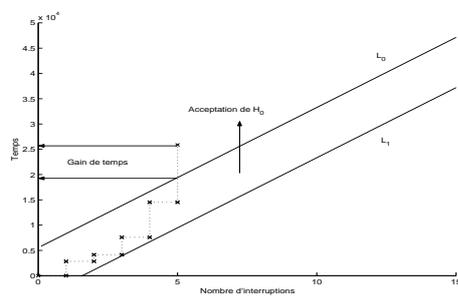


FIG. 2.4 – Acceptation de H_0 ($\theta = 4000$ heures)

D'un point de vue mathématique, le test $S(A^*, B)$ est satisfaisant car on connaît toutes ses propriétés. Cependant, il peut nécessiter un très grand nombre d'interruptions pour prendre une décision comme l'illustre la figure FIG. 2.5.

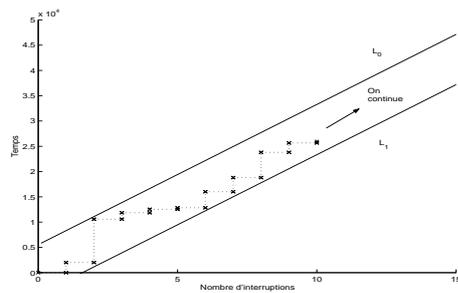


FIG. 2.5 – Continuation ($\theta = 3000$ heures)

2.3 Test tronqué

Par rapport à un test classique, un test séquentiel permet d'économiser en moyenne des observations. Cependant le test séquentiel peut aléatoirement nécessiter un nombre d'observations supérieur à un test classique.

La société qui désire qualifier les capteurs, voudrait savoir de manière sûre, pour des problèmes d'ordre pécuniaire et des questions de planification, que la durée du test n'excèdera pas un temps t_0 fixé au préalable. C'est pourquoi nous allons tronquer la procédure séquentielle.

2.3.1 Troncature du test

On désire toujours utiliser le TSRP $S(A,B)$ dont la règle de décision au temps t est la suivante :

- on continue à observer le fonctionnement du capteur si

$$rs - h_1 < t < rs + h_0,$$

- on rejette H_0 si

$$t \leq rs - h_1$$

- et on accepte H_0 si

$$t \geq rs + h_0,$$

où r , s , h_0 et h_1 ont été définis au paragraphe 2.2.2.

Mais afin de satisfaire aux souhaits de l'entreprise, nous allons tronquer le test $S(A,B)$. Pour cela, on se fixe un temps t_0 au-delà duquel le test ne doit pas continuer mais aussi un nombre i_0 d'interruptions dans le fonctionnement du capteur qui ne doit pas être dépassé.

Si aucune décision n'a été prise avant que le temps t_0 ne se soit écoulé ou que i_0 interruptions n'aient été observées,

- on accepte $H_0 : \theta = \theta_0$ si le temps t_0 a été observé avant que i_0 interruptions ne soient survenues

- et on accepte $H_1 : \theta = \theta_1$ si i_0 interruptions se sont produites pendant une durée inférieure ou égale à t_0 .

La figure FIG. 2.6 représente le fonctionnement du test défini par la relation (2.10) tronqué à i_0 et t_0 que l'on notera $S_{i_0,t_0}(A,B)$.

Comme pour le test non tronqué, on se fixe les risques de première et deuxième espèces α et β et on détermine les constantes A et B de $S_{i_0,t_0}(A,B)$ de façon à ce que le test $S_{i_0,t_0}(A,B)$ ait pour risque de première et deuxième espèces α et β .

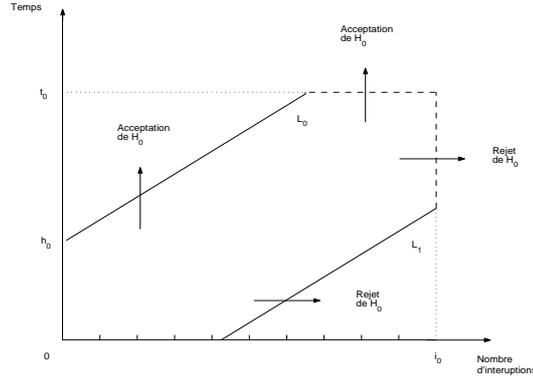


FIG. 2.6 – Représentation du fonctionnement du test tronqué

En pratique, on choisira comme pour le test non tronqué :

$$B = \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (2.14)$$

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha} \frac{d + 1}{2d}. \quad (2.15)$$

En ce qui concerne i_0 et t_0 , il y a plusieurs façon de les choisir. Les valeurs i_0 et t_0 peuvent être déterminées par les impératifs de l'entreprise. Si tel n'est pas le cas nous proposons une façon de choisir i_0 et t_0 .

Détermination de i_0

On rappelle que l'on dispose d'un échantillon X_1, \dots, X_n de variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ avec $\theta \in \Theta$ et que l'on désire tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1$.

Puisqu'un test séquentiel est plus économe (en moyenne) en nombre d'observations qu'un test classique, on se propose de déterminer i_0 de façon à ce que i_0 soit la taille de l'échantillon d'un test classique de niveau α et de puissance maximale égale à $1 - \beta$ pour tester H_0 contre H_1 .

L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $\frac{T_n}{n}$ où T_n est le temps où est survenue la n -ème interruption.

D'après l'annexe A, on sait que T_n suit une loi gamma $\Gamma(n, \frac{1}{\theta})$. Donc d'après la proposition A.1.1, $\frac{2T_n}{\theta}$ suit une loi de Xhi-deux à $2n$ degrés de liberté sous le paramètre θ .

A n et α fixés, d'après le lemme de Neyman-Pearson, le test S_α qui maximise la puissance $1 - \beta$, est le test de région critique l'ensemble des points (x_1, \dots, x_n) tels que

$$\frac{\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^n x_i}}{\left(\frac{0}{\theta_1}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i}} \geq C_\alpha \Leftrightarrow T_n \leq \frac{\text{Log}(C_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n)}{\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)} = T_c.$$

Le couple (n, T_c) doit alors vérifier

$$\mathbb{P}_{\theta_0} \left(\frac{2T_n}{\theta_0} \leq \frac{2T_c}{\theta_0} \right) = \alpha,$$

$$\mathbb{P}_{\theta_1} \left(\frac{2T_n}{\theta_1} \leq \frac{2T_c}{\theta_0} \right) = 1 - \beta.$$

Si on note $\chi_{2n, \alpha}^2$ et $\chi_{2n, 1-\beta}^2$ les quantiles d'ordre α et $1 - \beta$ d'une loi de Xhi-deux à $2n$ degrés de liberté, on obtient :

$$\frac{2T_c}{\theta_0} = \chi_{2n, \alpha}^2,$$

$$\frac{2T_c}{\theta_1} = \chi_{2n, 1-\beta}^2.$$

Avant de pouvoir calculer T_c , il faut déterminer la valeur de n . Pour cela on fait le rapport des deux relations précédentes, ce qui nous donne

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{\chi_{2n, \alpha}^2}{\chi_{2n, 1-\beta}^2}.$$

Il n'y a pas, en général, de valeurs n qui vérifient exactement cette relation. Mais, le rapport $\frac{\theta_1}{\theta_0} < 1$ et $\lim_{i_0 \rightarrow +\infty} \frac{\chi_{2i_0, \alpha}^2}{\chi_{2i_0, 1-\beta}^2} = 1$. On peut alors chercher à déterminer le plus petit entier n qui vérifie

$$\frac{\chi_{2n, \alpha}^2}{\chi_{2n, 1-\beta}^2} \geq \frac{\theta_1}{\theta_0}.$$

Une fois n déterminé, on a $T_c = \frac{\theta_0 \chi_{2n, \alpha}^2}{2}$.

On choisit donc i_0 comme le plus petit entier vérifiant :

$$\frac{\chi_{2i_0, \alpha}^2}{\chi_{2i_0, 1-\beta}^2} \geq \frac{\theta_1}{\theta_0}. \quad (2.16)$$

Détermination de t_0

On se fixe i_0 , le plus petit entier vérifiant la relation (2.16). Les observations x_1, \dots, x_{i_0} de X_1, \dots, X_{i_0} sont obtenues au cours du temps. Si le temps d'observation ne peut excéder un temps t , il est alors possible que toutes les observations ne surviennent pas au cours du temps t et on ne peut donc plus utiliser le test S_α . On décide alors

- d'accepter H_0 si $T_{i_0} \geq t$
- et d'accepter H_1 si $T_{i_0} < t$.

L'acceptation de H_1 ou H_0 se fait donc au temps T_{i_0} ou t . La région critique de S_α était $T_{i_0} \leq T_c$. Le bon choix de t est alors

$$t = T_c = \frac{\theta_0 \chi_{2i_0, \alpha}^2}{2}.$$

On choisit alors t_0 de la même manière que pour le test classique utilisé lorsque le temps est limité c'est-à-dire

$$t_0 = \frac{\theta_0 \chi_{2i_0, \alpha}^2}{2}. \quad (2.17)$$

2.3.2 Application

Pour la qualification de ses capteurs, les risques α et β de première et deuxième espèces étant fixés à 0.2, on emploie finalement le test $S_{i_0, t_0}(A, B)$ où A , B , i_0 et t_0 sont définis par les relations (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17).

Pour $\alpha = \beta = 0.2$, on obtient donc :

$$A = 3 \text{ et } B = 0.25.$$

En utilisant les tables de loi du Xhi deux, on obtient ensuite :

$$i_0 = 7 \text{ et } t_0 = 18934 \text{ heures.}$$

Nous avons simulé des données selon différentes valeurs du paramètre θ . Les figures FIG. 2.6 et FIG. 2.7 représentent les résultats obtenus pour $\theta = 4000$ heures et $\theta = 2000$ heures lorsque la décision se fait à la troncature.

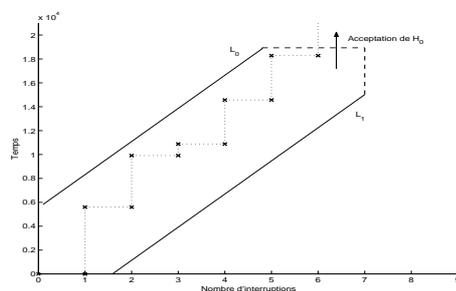


FIG. 2.7 – Acceptation de H_0 ($\theta = 4000$ heures)

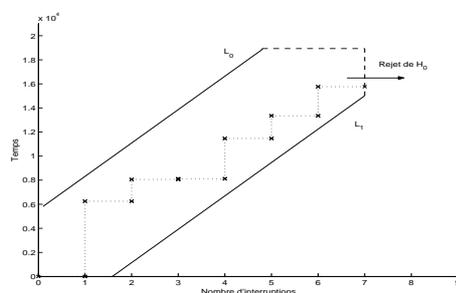


FIG. 2.8 – Rejet de H_0 ($\theta = 2000$ heures)

Les approximations des fonctions d'efficacité, ASN et AST du paragraphe précédent ne sont plus valables pour le test tronqué $S_{i_0, t_0}(A, B)$.

On pourrait utiliser, comme dans le chapitre 1, la méthode directe afin d'en tracer les courbes représentatives. Nous avons préféré utiliser la méthode de Monte Carlo pour tracer ces courbes. Les figures FIG. 2.9, FIG. 2.10, FIG. 2.11 représentent les résultats obtenus pour 6000 trajectoires.

En particulier, on obtient les véritables risques :

$$\alpha' = 0.5322 \text{ et } \beta' = 0.0707.$$

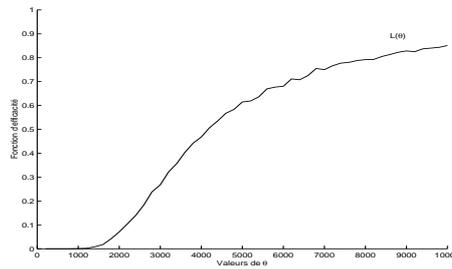


FIG. 2.9 – Approximation de la fonction d'efficacité

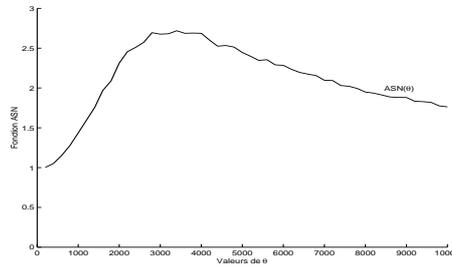


FIG. 2.10 – Approximation de la fonction ASN

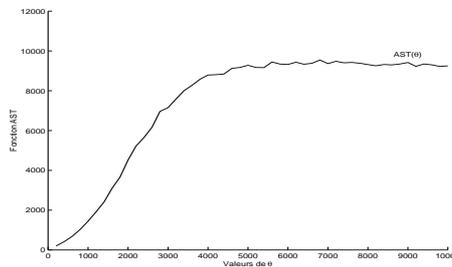


FIG. 2.11 – Approximation de la fonction AST

Chapitre 3

Limites de confiance pour le vrai MTBO après test

3.1 Introduction

3.1.1 Description du problème

Le but du chapitre précédent consistait en la qualification de capteurs, en un temps minimum, par un test sur la valeur du MTBO. Les risques de première et deuxième espèces α et β étant fixés, nous avons utilisé le test séquentiel du rapport des probabilités tronqué $S_{i_0, t_0}(A, B)$ où i_0 , t_0 , A et B sont définis par les relations (2.16), (2.17), (2.14) et (2.15).

Une fois le test terminé, l'entreprise aimerait, principalement dans le cas de l'acceptation du capteur, obtenir des **limites de confiance inférieure et supérieure pour le MTBO** sachant le résultat du test $S_{i_0, t_0}(A, B)$.

Déjà plusieurs essais ont été fait dans ce domaine. Certains mathématiciens comme Aroian, Sumerlin et Schmee ont utilisés des méthodes bayésiennes. Mais, les praticiens étant assez réticents à utiliser des méthodes bayésiennes car alors il faut faire une hypothèse sur la distribution de θ , des statisticiens tels que Luetjen, Bryant et Shmee ont cherché à développer d'autres méthodes.

La méthode que nous présenterons dans ce chapitre est celle décrite par Bryant et Shmee [3].

3.1.2 Standardisation et notations

Avant de déterminer les limites de confiance du MTBO, nous allons introduire les notations utilisées dans ce chapitre.

Standardisation

Nous allons procéder dans ce paragraphe à une standardisation de toutes les quantités intervenant dans le chapitre précédent.

• Nous avons utilisé la version tronquée du test $S(A,B)$ défini par la relation (2.3). Si maintenant on divise tous les membres de la relation (2.3) par θ_1 , on obtient la relation suivante :

$$r \frac{\text{Log}d}{1 - \frac{1}{d}} - \frac{\text{Log}A}{1 - \frac{1}{d}} < \frac{t}{\theta_1} < r \frac{\text{Log}d}{1 - \frac{1}{d}} + \frac{-\text{Log}B}{1 - \frac{1}{d}}.$$

En notant $h'_0 = \frac{-\text{Log}B}{1 - \frac{1}{d}}$, $h'_1 = \frac{\text{Log}A}{1 - \frac{1}{d}}$, $s' = \frac{\text{Log}d}{1 - \frac{1}{d}}$ et $t' = \frac{t}{\theta_1}$, la règle de décision de $S(A,B)$, au temps standardisé t' est la suivante :

- on continue à observer le capteur si

$$rs' - h'_1 < t' < rs' + h'_0,$$

- on accepte H_0 si

$$t' \geq rs' + h'_0$$

- et on rejette H_0 si

$$t' \leq rs' - h'_1.$$

L'avantage de diviser par θ_1 réside dans le fait que le test ne dépend maintenant de θ_0 et θ_1 qu'à travers le rapport discriminant d .

• Comme dans le chapitre 2, on tronque le test $S(A,B)$ pour obtenir le test où i_0 est le plus petit entier tel que

$$\frac{\chi_{2i_0, \alpha}^2}{\chi_{2i_0, 1-\beta}^2} \geq \frac{1}{d} \quad (3.1)$$

et le temps standardisé t'_0 de la troncature est déterminé par la relation :

$$t'_0 = \frac{d}{2} \chi_{2i_0, \alpha}^2. \quad (3.2)$$

Remarque :

Nous noterons désormais le temps standardisé t' et le paramètre standardisé θ' . Pour **actualiser** les quantités standardisées, il suffira de les multiplier par θ_1 .

Notations

Contrairement au chapitre précédent, nous représenterons toujours le nombre d'interruptions en ordonnées et le temps standardisé en abscisse.

Ainsi l'équation de la frontière d'acceptation avant la troncature sera donnée par :

$$U_0 : r = \frac{t' - h'_0}{s'},$$

tandis que l'équation de la frontière de rejet avant la troncature sera donnée par :

$$U_1 : r = \frac{t' + h'_1}{s'}.$$

Nous noterons (i, t') un point de la région de continuation qui ne peut être atteint que par i interruptions en un temps standardisé t' , sans que le test ne soit terminé avant que le temps t' ne se soit écoulé.

Nous noterons ensuite $\mathbb{P}((i, t'); \theta')$ la probabilité que i interruptions surviennent en un temps standardisé t' sans que le test ne se termine avant le temps t' alors que θ' est le vrai paramètre.

Définition 3.1.1 On note t_{A_i} le **temps standardisé d'acceptation** si t_{A_i} est tel que le test accepte H_0 avec au plus i interruptions pendant le temps $t_{A_i}\theta_1$.

De même, on note t_{R_i} le **temps standardisés de rejet** si t_{R_i} est tel que le test rejette H_0 avec au moins i interruptions pendant le temps $t_{R_i}\theta_1$.

Ainsi (i, t_{A_i}) est un point de la frontière d'acceptation et $\mathbb{P}((i, t_{A_i}); \theta')$ est la probabilité que le test se termine par une acceptation au temps t_{A_i} avec i interruptions lorsque θ' est la valeur du paramètre.

De même (i, t_{R_i}) est un point de la frontière de rejet et $\mathbb{P}((i, t_{R_i}); \theta')$ est la probabilité que le test se termine au temps t_{R_i} avec i interruptions lorsque θ' est la valeur du paramètre.

Si r est l'indice du plus petit temps de rejet et a l'indice du plus grand, alors il sera commode pour la suite de poser $t_{R_{r-1}} = 0$ et $t_{R_{a+1}} = t'_0$.

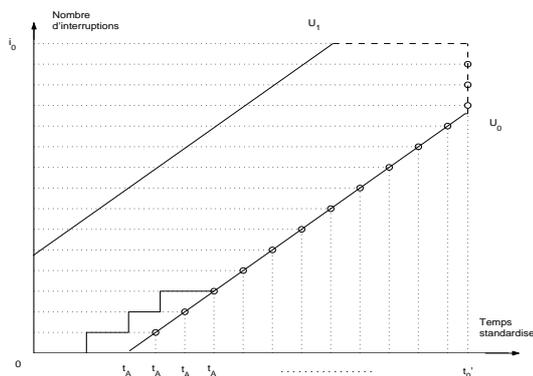


FIG. 3.1 – Temps standardisés d'acceptation

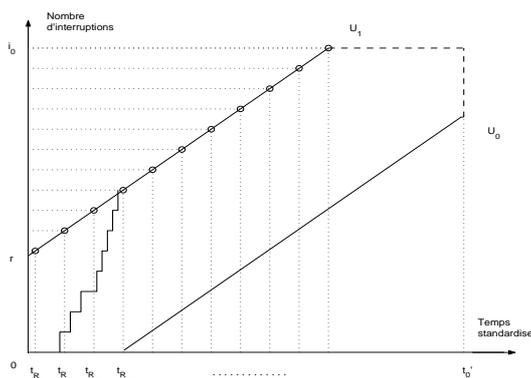


FIG. 3.2 – Temps standardisés de rejet

Les figures FIG. 3.1 et FIG. 3.2 représentent les temps standardisés d'acceptation et de rejet du test $S_{i_0, t'_0}(A, B)$.

En observant les figures FIG. 3.1 et FIG. 3.2, on remarque que l'acceptation ne survient qu'à des temps discrets $t_{A_0}, t_{A_1}, \dots, t'_0$, alors que le rejet survient à n'importe quel moment entre deux temps de rejet standardisés t_{R_i} et $t_{R_{i+1}}$ avec $r - 1 \leq i \leq a$ pourvu que i interruptions se soient déjà produites. En conséquence, l'obtention de limites de confiance se fera de manière différente selon que le test s'est terminé par une acceptation ou par un rejet.

3.2 Limite de confiance

Avant de pouvoir calculer les limites de confiance du paramètre θ , il est nécessaire de calculer les probabilités d'acceptation et de continuation $\mathbb{P}((i, t'); \theta')$ pour certaines valeurs de t' .

3.2.1 Calculs des probabilités d'acceptation et de continuation

Soit $(t_{(k)})_k$ une suite de temps de fin de test standardisés, distincts et rangés dans l'ordre croissant telle que $t_{(0)} = 0$ et $t_{(j)} = t'_0$. On pose pour $l = 1 \dots j$

$$\Delta_l = t_{(l)} - t_{(l-1)}.$$

On a alors

$$]0, t_{(k)}] = \cup_{l=1}^k]t_{(l-1)}, t_{(l)}] \text{ et } \sum_{l=1}^k \Delta_l = t_{(k)}.$$

Soit $(i, t_{(k)})$, $k \leq j$, un point de la région de continuation ou de la frontière d'acceptation. Nous allons calculer les probabilités $\mathbb{P}((i, t_{(k)}); \theta')$ pour toutes les valeurs possibles de θ' .

Pour une valeur θ' du paramètre standardisé, la probabilité que δ_l interruptions surviennent dans l'intervalle de temps $]t_{(l-1)}, t_{(l)}]$ est égale à

$$\mathbb{P}(\delta_l \text{ interruptions dans }]t_{(l-1)}, t_{(l)}]; \theta') = \mathbb{P}(N(t_{(l)}\theta_1) - N(t_{(l-1)}\theta_1) = \delta_l; \theta').$$

Or d'après l'annexe A, $N(t_{(l)}\theta_1) - N(t_{(l-1)}\theta_1)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\Delta_l}{\theta'}$. On peut alors en déduire que

$$\mathbb{P}(\delta_l \text{ interruptions dans }]t_{(l-1)}, t_{(l)}]; \theta') = e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \frac{(\Delta_l/\theta')^{\delta_l}}{\delta_l!}.$$

Si maintenant, on considère un k -uplet $(\delta_1, \dots, \delta_k)$ d'entiers positifs tels que $\sum_{l=1}^k \delta_l = i$ et ne conduisant pas à une terminaison du test avant $t_{(k)}$, alors la probabilité qu'il y ait i interruptions pendant le temps $t_{(k)}$ avec pour chaque l , δ_l interruptions dans l'intervalle $]t_{(l-1)}, t_{(l)}]$ sans que le test ne se termine avant $t_{(k)}$ est égale à

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((\delta_1, \dots, \delta_k), \text{ pas de terminaison avant } t_{(k)}; \theta') \\ &= \mathbb{P}(\forall l = 1 \dots k, \delta_l \text{ interruptions dans }]t_{(l-1)}, t_{(l)}]; \theta') \\ &= \mathbb{P}(\forall l = 1 \dots k, N(t_{(l-1)}\theta_1) - N(t_{(l)}\theta_1) = \delta_l; \theta'). \end{aligned}$$

Par indépendance des accroissements de N , on obtient alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((\delta_1, \dots, \delta_k), \text{ pas de terminaison avant } t_{(k)}; \theta') \\ &= \prod_{l=1}^k e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \frac{(\Delta_l/\theta')^{\delta_l}}{\delta_l!} \\ &= \prod_{l=1}^k e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^{\delta_l} \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!} \\ &= e^{-\frac{t_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^i \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la probabilité que i interruptions surviennent pendant un temps $t_{(k)}$ sans que le test ne se termine avant $t_{(k)}$ pour une valeur θ' du paramètre standardisé est

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((i, t_{(k)}); \theta') \\ &= \sum_S \mathbb{P}((\delta_1, \dots, \delta_k), \text{ pas de terminaison avant } t_{(k)}; \theta') \\ &= e^{-\frac{t_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^i \sum_S \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!} \end{aligned}$$

où S désigne l'ensemble des k -uplets tels que $\sum_{l=1}^k \delta_l = i$ qui ne conduisent pas à une terminaison du test avant l'instant $t_{(k)}$.

En posant,

$$c'(i, t_{(k)}) = \sum_S \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!}, \quad (3.3)$$

on obtient la relation

$$\mathbb{P}((i, t_{(k)}); \theta') = e^{-\frac{t_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'} \right)^i c'(i, t_{(k)}). \quad (3.4)$$

On divise la relation (3.4) par la probabilité que i interruptions surviennent au cours du temps $t_{(k)}$ afin de faire disparaître les termes en θ' et on pose ainsi

$$c(i, t_{(k)}) = c'(i, t_{(k)}) i! \left(\frac{1}{t_{(k)}} \right)^i. \quad (3.5)$$

Remarque :

Cette modification permet d'obtenir des coefficients $c(i, t_{(k)})$ à valeurs dans un intervalle de longueur nettement inférieure à celle de l'intervalle auquel appartiennent les coefficients $c'(i, t_{(k)})$.

On aboutit alors à la relation fondamentale

$$\mathbb{P}((i, t_{(k)}); \theta') = c(i, t_{(k)}) e^{-\frac{t_{(k)}}{\theta'}} \frac{(t_{(k)}/\theta')^i}{i!}. \quad (3.6)$$

Le calcul à la main des coefficients $c(i, t_{(k)})$ définis par les relations (3.3) et (3.5) est long car il faut dénombrer tous les k -uplets de S . Il est plus astucieux d'utiliser la méthode directe de Aroian décrite au paragraphe 1.2.3 pour calculer $\mathbb{P}((i, t_{(k)}); \theta')$ pour une certaine valeur de θ' , par exemple $\theta' = 1$, afin d'obtenir le coefficient $c(i, t_{(k)})$.

Pour le calcul de $\mathbb{P}((i, t_{(k)}); \theta')$ pour les autres valeurs de θ' , il suffit ensuite de faire varier la valeur de θ' dans la relation (3.6) car les coefficients $c(i, t_{(k)})$ ne dépendent pas de θ' .

3.2.2 Limite de confiance après acceptation

Nous allons utiliser la méthode décrite dans l'annexe C pour obtenir les limites standardisées de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ lorsque l'hypothèse H_0 a été acceptée, c'est-à-dire lorsque le test a accepté le capteur. Nous allons manipuler, contrairement au cas du rejet, des variables aléatoires discrètes. En conséquence, la méthode de l'annexe C conduira à l'obtention de limites de confiance supérieure à $(1 - \gamma)100\%$.

L'acceptation se produit comme l'illustre la figure FIG. 3.1 aux temps standardisés $t_{A_0}, t_{A_1}, \dots, t_{A_{i_0-1}}$. On peut remarquer que les temps d'acceptation standardisés sur la troncature verticale sont égaux à t'_0 .

Pour pouvoir appliquer la méthode de l'annexe C, nous avons besoin d'un estimateur de θ' . Soit T_A le moment où le test accepte le capteur.

La probabilité que le test se termine au temps t_{A_i} est égale à la probabilité $\mathbb{P}((i, t_{A_i}); \theta')$ que le test se termine par une acceptation avec i interruptions et la probabilité que le test ne se termine pas par une acceptation est égale à $\mathbb{P}(\text{Rejet du test}; \theta')$.

Ainsi, T_A est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs t_{A_i} , pour i variant de 0 à $i_0 - 1$, avec les probabilités $\mathbb{P}((i, t_{A_i}); \theta')$ lorsque le test se termine par une acceptation et la valeur $+\infty$ avec la probabilité $\mathbb{P}(\text{Rejet du test}; \theta')$ lorsque le test se termine par un rejet.

On se propose alors d'estimer θ' par

$$\hat{\theta}' = \frac{T_A}{N(T_A)} \mathbb{1}_{\{T_A < +\infty\}}, \quad (3.7)$$

ce qui revient à estimer θ' par $\frac{t_{A_i}}{i}$ lorsque le test se termine par une acceptation avec i interruptions.

Les limites de confiance que nous allons obtenir dépendent du résultat du test. On suppose alors que **le test s'est terminé par une acceptation au temps t_{A_i} avec i interruptions**. La réalisation de $\hat{\theta}'$ est égale à $\frac{t_{A_i}}{i}$.

Limite inférieure

Notons $\theta'_{L, \gamma, i}$ la limite inférieure de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ de θ' lorsque le test s'est terminé par une acceptation avec i interruptions. La limite inférieure $\theta_{L, \gamma, i}$ de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ de θ est donc égale à $\theta_1 \theta'_{L, \gamma, i}$.

La borne inférieure de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ est d'après l'équation (C.4) solution de

$$\sum_{s/\frac{t_{A_s}}{s} \geq \frac{t_{A_i}}{i}} \mathbb{P}(\hat{\theta}' = \frac{t_{A_s}}{s}; \theta'_{L, \gamma, i}) + \mathbb{P}(\hat{\theta}' = 0; \theta'_{L, \gamma, i}) \mathbb{1}_{\{0 \geq \frac{t_{A_i}}{i}\}} = \gamma. \quad (3.8)$$

D'une part, on a $\frac{t_{A_i}}{i} > 0$.

Montrons d'autre part que la suite $(\frac{t_{A_s}}{s})_s$ est décroissante.

- Soient t_{A_s} et $t_{A_{s+1}}$ deux temps d'acceptation standardisés sur la frontière d'acceptation avant la troncature. Alors

$$\frac{t_{A_s}}{s} - \frac{t_{A_{s+1}}}{s+1} = h'_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) > 0 \text{ car } h'_0 > 0.$$

- Soient t_{A_s} et $t_{A_{s+1}}$ deux temps d'acceptation standardisés sur la frontière d'acceptation à la troncature. Alors

$$\frac{t_{A_s}}{s} - \frac{t_{A_{s+1}}}{s+1} = t'_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) > 0.$$

- Soient t_{A_s} et $t_{A_{s+1}}$ deux temps d'acceptation standardisés tels que $t_{A_{s+1}} = t'_0$ et t_{A_s} est sur la frontière d'acceptation avant la troncature. Alors

$$\frac{t_{A_s}}{s} - \frac{t_{A_{s+1}}}{s+1} = s' + \frac{h_0}{s} - \frac{t'_0}{s} \geq h'_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) > 0 \text{ car } t_{A_{s+1}} \leq (s+1)s + h'_0.$$

Enfin, on a $\{\hat{\theta}' = \frac{t_{A_s}}{s}\} = \{ \text{acceptation du test avec } s \text{ interruptions} \}$ donc $\mathbb{P}(\hat{\theta}' = \frac{t_{A_s}}{s}; \theta'_{L,\gamma,i}) = \mathbb{P}((s, t_{A_s}); \theta'_{L,\gamma,i})$.

On peut alors réécrire la relation (3.8) comme suit

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{s=0}^i \mathbb{P}((s, t_{A_s}); \theta'_{L,\gamma,i}) \\ \gamma &= \sum_{s=0}^i c(s, t_{A_s}) e^{-t_{A_s}/\theta'_{L,\gamma,i}} \frac{(t_{A_s}/\theta'_{L,\gamma,i})^s}{s!}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

On résout ensuite l'équation (3.9) en $\theta'_{L,\gamma,i}$ par la **méthode de bisection**.

Limite supérieure

Notons $\theta'_{U,\gamma,i}$ la limite supérieure standardisée à $(1-\gamma)100\%$ de θ' . La limite supérieure $\theta_{U,\gamma,i}$ à $(1-\gamma)100\%$ de θ sera donc $\theta_1 \theta'_{U,\gamma,i}$.

D'après l'équation (C.5), la borne supérieure de confiance à $(1-\gamma)100\%$ est donnée par l'équation

$$\sum_{s/\frac{t_{A_s}}{s} \leq \frac{t_{A_i}}{i}} \mathbb{P}(\hat{\theta}' = \frac{t_{A_s}}{s}; \theta'_{U,\gamma,i}) + \mathbb{P}(\hat{\theta}' = 0; \theta'_{U,\gamma,i}) \mathbb{1}_{\{0 \leq \frac{t_{A_i}}{i}\}} = \gamma. \quad (3.10)$$

On a montré que la suite $(\frac{t_{A_s}}{s})_s$ est décroissante et que $\frac{t_{A_i}}{i} > 0$. De plus on a $\{\hat{\theta}' = 0\} = \{ \text{Rejet du test} \}$ donc $\mathbb{P}(\hat{\theta}' = 0; \theta'_{U,\gamma,i}) = \mathbb{P}(\text{Rejet du test}; \theta'_{U,\gamma,i})$.

On peut alors réécrire (3.10) de la façon suivante

$$\sum_{s=i}^{i_0} \mathbb{P}((s, t_{A_s}); \theta'_{U,\gamma,i}) + \mathbb{P}(\text{Rejet du test}; \theta'_{U,\gamma,i}) = \gamma. \quad (3.11)$$

Enfin, en remarquant que

$$\mathbb{P}(\text{Rejet du test}; \theta'_{U,\gamma,i}) = 1 - \sum_{s=0}^{i_0} \mathbb{P}((s, t_{A_s}); \theta'_{U,\gamma,i}),$$

la relation (3.11) s'écrit

$$\begin{aligned} 1 - \gamma &= \sum_{s=0}^{i-1} \mathbb{P}((s, t_{A_s}); \theta'_{U,\gamma,i}) \\ 1 - \gamma &= \sum_{s=0}^{i-1} c(s, t_{A_s}) e^{-t_{A_s}/\theta'_{U,\gamma,i}} \frac{(t_{A_s}/\theta'_{U,\gamma,i})^s}{s!}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) peut être résolue en $\theta'_{U,\gamma,i}$ par la **méthode de bisection**.

3.2.3 Limite de confiance après rejet

Dans le cas du rejet, il est moins intéressant d'obtenir des limites de confiance puisque l'on considère à ce moment que le capteur est défectueux et donc qu'il ne sera pas utilisé. Nous donnons cependant, sans démonstration, les résultats que l'on obtiendrait en appliquant la méthode décrite dans l'annexe C dans le cas du rejet.

Contrairement à l'acceptation, le rejet se produit comme l'illustre la FIG. 3.2 entre deux temps standardisés de rejet $t_{R_{i-1}}$ et t_{R_i} pourvu que $i - 1$ interruptions se soient déjà produites et est alors égal au au temps T_i de la i -ème interruption. Dans ce cas, la méthode de l'annexe C conduit à l'obtention de limites de confiance égale à $(1 - \gamma)100\%$ car le temps de rejet est une variable aléatoire absolument continue.

Si on note $\theta'_{L,\gamma,t'}$ la limite inférieure de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ de θ' lorsque le test s'est terminé par un rejet au temps t' avec i interruptions où $t_{R_{i-1}} < t' \leq t_{R_i}$ et $\mathbb{P}_{Rej}(t'; \theta'_{L,\gamma,t'})$ la probabilité que le test se termine par un rejet avant ou au temps t' pour une valeur du paramètre égale à $\theta'_{L,\gamma,t'}$, alors $\theta'_{L,\gamma,t'}$ est solution de l'équation

$$1 - \gamma = \mathbb{P}_{Rej}(t; \theta'_{L,\gamma,t}). \quad (3.13)$$

De même, si on note $\theta'_{U,\gamma,t'}$ la limite supérieure de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ de θ' lorsque le test s'est terminé par un rejet au temps t' avec i interruptions où $t_{R_{i-1}} < t' \leq t_{R_i}$, alors $\theta'_{U,\gamma,t'}$ est solution de l'équation

$$\gamma = \mathbb{P}_{Rej}(t; \theta'_{U,\gamma,t}). \quad (3.14)$$

Afin de pouvoir résoudre les équations (3.13) et (3.14) par la méthode de bisection, il est important de remarquer que pour tout θ' on a

$$\mathbb{P}_{Rej}(t'; \theta') = 1 - \mathbb{P}(\text{Continuation en } t'; \theta') - \mathbb{P}(\text{Acceptation avant ou en } t'; \theta'),$$

$$\mathbb{P}(\text{Acceptation avant ou en } t'; \theta') = \begin{cases} \sum_{l=0}^{n(t')} \mathbb{P}((l, t_{A_l}); \theta') & \text{si } t' \geq t_{A_0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \mathbb{P}(\text{Continuation } t'; \theta') = \begin{cases} 0 & \text{si } t' = t'_0 \\ \sum_{l=n(t')+1}^{i-1} \mathbb{P}((l, t'); \theta') & \text{si } t_{A_0} \leq t' < t'_0 \\ \sum_{l=0}^{i-1} \mathbb{P}((l, t'); \theta') & \text{si } 0 < t' < t_{A_0}. \end{cases}$$

Ainsi $\mathbb{P}_{Rej}(t'; \theta') =$

$$\begin{cases} 1 - \sum_{l=0}^{n(t')} c(l, t_{A_l}) e^{-\frac{t_{A_l}}{\theta'}} \frac{(\frac{t_{A_l}}{\theta'})^l}{l!} - \sum_{l=n(t')+1}^{i-1} c(l, t') e^{-\frac{t'}{\theta'}} \frac{(\frac{t'}{\theta'})^l}{l!} & \text{si } t_{A_0} \leq t' < t'_0 \\ 1 - \sum_{l=0}^{i-1} c(l, t') e^{-\frac{t'}{\theta'}} \frac{(\frac{t'}{\theta'})^l}{l!} & \text{si } t < t_{A_0} \\ 1 - \sum_{l=0}^{i_0-1} c(l, t_{A_l}) e^{-\frac{t_{A_l}}{\theta'}} \frac{(\frac{t_{A_l}}{\theta'})^l}{l!} & \text{si } t' = t'_0. \end{cases}$$

3.2.4 Applications

Première application

On se fixe toujours $\alpha = \beta = 0.2$. Ensuite, on fait le choix $d = 2$, qui inclut le cas $\theta_0 = 4000$ et $\theta_1 = 2000$.

- Dans l'application du paragraphe 2.3.2, nous avons obtenu

$$A = 3 \text{ et } B = 0.25.$$

Des équations (3.1) et (3.2), nous obtenons grâce aux tables de la loi du Xhi-deux,

$$i_0 = 7 \text{ et } t'_0 = 9.467.$$

On est ainsi en mesure de représenter les régions du test séquentiel. La figure FIG. 3.3 représente les régions du test correspondant à ce choix de α , β et d .

- Dans le paragraphe 3.2.1, nous avons vu qu'il fallait se donner une suite de temps de fin de test pour lesquels on calcule les coefficients d'acceptation et de continuation.

Dans le cas de l'acceptation, le test se terminant nécessairement à un temps standardisé d'acceptation, nous prenons comme suite de temps standardisés de fin de test la suite des temps standardisés d'acceptation rangés dans l'ordre croissant.

En revanche dans le cas du rejet, le test se terminant à n'importe quel moment entre deux temps standardisés de rejet, nous choisissons la suite des temps standardisés d'acceptation et de rejet rangés dans l'ordre croissant. Pour obtenir les limites de confiance inférieures et supérieures pour un temps t' différent des temps standardisés d'acceptation ou de rejet il suffira d'utiliser une méthode d'interpolation linéaire.

Les temps standardisés d'acceptation et de rejet sont donnés dans les tableaux TAB. 3.1 et TAB. 3.2.

- Nous devons maintenant calculer les coefficients d'acceptation et de continuation $c(i, t')$. Pour cela, on se fixe $\theta' = 1$ et on applique la méthode directe d'Aroian (cf paragraphe 1.2.3). Pour chaque temps standardisé t' de rejet ou d'acceptation, on calcule les probabilités d'acceptation et de continuation $\mathbb{P}((i, t'); 1)$ dont nous déduisons ensuite les coefficients d'acceptation et de continuation.

Ces probabilités sont représentées sur la figure FIG. 3.3. Les calculs ont été effectués de la façon suivante: pour calculer la probabilité d'arriver à un point de la région de continuation ou de la frontière d'acceptation, il suffit de chercher toutes les trajectoires du processus $N(t)$ conduisant à ce point sans sortir préalablement de la région de continuation et d'additionner les probabilités de chaque trajectoire.

Exemple :

- Les probabilités de continuation $\mathbb{P}((0,0.575); 1)$ et $\mathbb{P}((1,0.575); 1)$ au temps $t_{R_2} = 0.575$ et $\mathbb{P}((0,0.1.962); 1)$, $\mathbb{P}((1,1.962); 1)$ et $\mathbb{P}((2,1.962); 1)$ au temps $t_{R_3} = 1.962$ se calculent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((0,0.575); 1) &= e^{-0.575} = 0.5627. \\ \mathbb{P}((1,0.575); 1) &= 0.575 e^{-0.575} = 0.3235 \\ \mathbb{P}((0,1.962); 1) &= 0.5627 e^{-1.962} = 0.1406. \\ \mathbb{P}((1,1.962); 1) &= e^{-(1.962-0.575)}(0.5627(1.962 - 0.575) + 0.3235) = 0.2758. \\ \mathbb{P}((2,1.962); 1) &= e^{-(1.962-0.575)}\left(\frac{0.5627}{2}(1.962 - 0.575)^2 + 0.3235(1.962 - 0.575)\right) \\ &= 0.2473.\end{aligned}$$

- Pour obtenir $\mathbb{P}((0,t_{A_0}); 1)$ il faut avoir calculé $\mathbb{P}((0,1.962); 1)$. Donc

$$\mathbb{P}((0,t_{A_0}); 1) = 0.1406 e^{-(2.772-1.962)} = 0.0625.$$

- Les autres probabilités de continuation et d'acceptation se calculent de la même manière.

Les coefficients d'acceptation $c(i,t_{A_i})$ et de continuation $c(i,t')$ s'obtiennent grâce aux formules suivantes :

$$c(i,t_{A_i}) = e^{t_{A_i}} \frac{i!}{(t_{A_i})^i} \mathbb{P}((i,t_{A_i}); 1) \quad (3.15)$$

$$c(i,t') = e^{t'} \frac{i!}{(t')^i} \mathbb{P}((i,t'); 1). \quad (3.16)$$

Les tableaux TAB. 3.3 et TAB. 3.4 recensent les coefficients de continuation et d'acceptation obtenus à partir des probabilités de continuation et d'acceptation de la figure FIG. 3.3.

• Maintenant on est en mesure de résoudre les équations (3.9) et (3.12) en θ' qui donnent respectivement les limites standardisées inférieure et supérieure de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ dans la cas de l'acceptation du capteur.

Comme nous l'avons dit précédemment nous allons utiliser la **méthode de bisection** qui permet de trouver un zéro x_R d'une fonction f de la façon suivante :

- on localise le zéro x_R dans un intervalle $[x_0, x_1]$,

- on choisit la précision ϵ sur x_R ,

- on calcule $x_2 = \frac{x_0+x_1}{2}$ et $f(x_1) f(x_2)$.

Si $f(x_1) f(x_2) > 0$ alors x_R est entre x_2 et x_1 . On met donc x_2 dans x_0 .

Si $f(x_1) f(x_2) < 0$ alors x_R est entre x_0 et x_2 . On met donc x_2 dans x_1 .

- On continue ainsi tant que $x_1 - x_0 \geq \epsilon$.

Les tableaux TAB. 3.5 et TAB. 3.6 donnent les limites inférieures et supérieures de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ du MTBO pour différentes valeurs de γ .

Remarque :

Lorsque le test s'est terminé par une acceptation, il est intéressant de calculer la probabilité $\mathbb{P}(\theta' \geq \theta'_0 | (i, t_{A_i}))$ que le vrai MTBO soit plus grand que θ'_0 sachant que le test s'est terminé par une acceptation avec i interruptions .

Cette probabilité s'obtient tout simplement en résolvant (3.9) non pas en θ' mais en γ . Le tableau TAB. 3.7 donne les résultats obtenus pour $\theta'_0 = 2$.

• Toujours par la méthode de bisection, pour le rejet on résout les équations (3.13) et (3.14) en θ' pour obtenir les bornes inférieure et supérieure du MTBO après rejet. Les résultats pour différentes valeurs de γ sont recensés dans les tableaux TAB. 3.7 et TAB. 3.8.

Si maintenant on désire obtenir les limites de confiance inférieures et supérieures pour un temps standardisé t' non tabulé, on utilise la méthode d'interpolation linéaire.

Supposons que $t'_1 < t' < t'_2$, où t'_1 et t'_2 sont deux temps standardisés tabulés dans les tableaux TAB. 3.3 et TAB. 3.4. Alors les limites standardisées inférieures $\theta_{L,\gamma,t'}$ et supérieures $\theta_{U,\gamma,t'}$ de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ pour $\gamma = 0.3, 0.2, 0.1$ et 0.05 sont données respectivement par les équations (3.17) et (3.18) :

$$\theta_{L,\gamma,t'} = \theta_{L,\gamma,t'_1} + (\theta_{L,\gamma,t'_2} - \theta_{L,\gamma,t'_1}) \frac{t' - t'_1}{t'_2 - t'_1}, \quad (3.17)$$

$$\theta_{U,\gamma,t'} = \theta_{U,\gamma,t'_1} + (\theta_{U,\gamma,t'_2} - \theta_{U,\gamma,t'_1}) \frac{t' - t'_1}{t'_2 - t'_1}. \quad (3.18)$$

Deuxième application

En pratique, on laisse toujours fonctionner les capteurs sur un minimum de un an.

Afin d'intégrer cette information à la procédure de test, on se place alors dans le même cadre que celui de l'application précédente mais on suppose que l'on observe le capteur au moins sur un an c'est-à-dire pendant 4.380 unités de temps standardisé.

La région du test est alors celle représentée par la figure FIG. 3.4.

- On prend dans le cas de l'acceptation comme suite de temps de fin de test la suite des temps standardisés d'acceptation supérieurs à 4.380 ainsi que le temps 4.380 que l'on ordonne dans l'ordre croissant.

- De la même manière que pour la première application, on calcule les probabilités d'acceptation représentées sur la figure FIG. 3.4.

Ensuite, on en déduit les coefficients d'acceptation de la formule (3.15). Ces coefficients sont recensés dans les tableaux TAB. 3.10.

- Pour obtenir les limites standardisées inférieures et supérieures de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ après acceptation on résout les équations (3.9) et (3.12) par la méthode de bisection. Les tableaux TAB. 3.11 et TAB. 3.12 donnent les résultats obtenus pour différentes valeurs de γ .

On peut alors comparer d'une part les tableaux TAB. 3.5 et TAB. 3.11 et d'autre part les tableaux TAB. 3.6 et TAB. 3.12. Lorsque le test se termine par une acceptation avec 0 ou 1 observation, on constate alors que le fait d'observer le capteur sur un an minimum à l'acceptation permet d'obtenir des bornes inférieures beaucoup plus grandes et des bornes supérieures bien plus petites que pour le test séquentiel utilisé dans la première application.

- Enfin, comme nous l'avions fait remarquer lors de la première application, on peut calculer les probabilités $\mathbb{P}(\theta' \geq \theta'_0 | (i, t_{A_i}))$, où ici $t_{A_0} = t_{A_1} = 4.380$, en résolvant l'équation (3.9) non pas en θ' mais en γ . Les résultats obtenus sont recensés dans le tableau TAB. 3.13.

En comparant les tableaux TAB. 3.7 et TAB. 3.13, on remarque alors que lorsque le test se termine par une acceptation avec un nombre d'observation égal à 0 ou à 1, les probabilités $\mathbb{P}(\theta' \geq \theta'_0 | (i, t_{A_i}))$ sont bien plus élevées dans le cas où l'on observe le capteur sur un minimum de un an pour l'acceptation.

Première application : Temps standardisés d'acceptation et de rejet

Nombre d'interruptions	Temps standardisés d'acceptation
0	$t_{A_0} = 2.772$
1	$t_{A_1} = 4.159$
2	$t_{A_2} = 5.545$
3	$t_{A_3} = 6.931$
4	$t_{A_4} = 8.318$
5	$t_{A_5} = 9.467$
6	$t_{A_6} = 9.467$

TAB. 3.1 – *Temps standardisés d'acceptation*

Nombre d'interruptions	Temps standardisés de rejet
2	$t_{R_2} = 0.575$
3	$t_{R_3} = 1.962$
4	$t_{R_4} = 3.348$
5	$t_{R_5} = 4.734$
6	$t_{R_6} = 6.120$
7	$t_{R_7} = 7.507$

TAB. 3.2 – *Temps standardisés de rejet*

Première application : Coefficients d'acceptation et de continuation

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$c(t_{A_i}, i)$
0	2.772	0.9994
1	4.159	0.6664
2	5.545	0.4895
3	6.931	0.3670
4	8.318	0.2752
5	9.467	0.2346
6	9.467	0.3659

TAB. 3.3 – Coefficients à l'acceptation

Temps standardisés	$c(t',0)$	$c(t',1)$	$c(t',2)$	$c(t',3)$	$c(t',4)$	$c(t',5)$	$c(t',6)$
0.575	1	0.9998	-	-	-	-	-
1.962	1.0002	1	0.9140	-	-	-	-
2.772	-	1.0003	0.9569	0.6076	-	-	-
3.348	-	0.8284	0.9410	0.7568	-	-	-
4.159	-	-	0.8696	0.8275	0.4667	-	-
4.734	-	-	0.6710	0.8054	0.6099	-	-
5.545	-	-	-	0.7161	0.6797	0.3592	-
6.120	-	-	-	0.5322	0.6584	0.4813	-
6.931	-	-	-	-	0.5716	0.5429	0.2752
7.507	-	-	-	-	0.4155	0.5233	0.3750
8.318	-	-	-	-	-	0.4482	0.4248

TAB. 3.4 – Coefficients de continuation

Première application : Limites de confiance après acceptation

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.05$
0	2.772	2.3035	1.7230	1.2042	0.9255
1	4.159	1.5829	1.2840	0.9811	0.7983
2	5.545	1.3715	1.1493	0.9112	0.7593
3	6.931	1.2759	1.0882	0.8802	0.7429
4	9.318	1.2247	1.0559	0.8646	0.7352
5	9.467	1.1884	1.0327	0.8534	0.7299
6	9.467	1.1268	0.9881	0.8270	0.7146

TAB. 3.5 – *Limites de confiance inférieures après acceptation*

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.05$
0	2.772	-	-	-	-
1	4.159	7.4849	12.4560	26.4604	54.6820
2	5.545	3.5529	4.7395	7.3704	11.0737
3	6.931	2.6445	3.3142	4.6518	6.3202
4	9.318	2.2728	2.7918	3.6931	4.7976
5	9.467	2.0814	2.4859	3.2403	4.1210
6	9.467	1.9504	2.3122	2.9729	3.7481

TAB. 3.6 – *Limites de confiance supérieures après acceptation*

Première application : Probabilités de confiance après acceptation

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$\mathbb{P}(\theta' \geq 2 (t_{A_i}, i))$
0	2.772	0.7501
1	4.159	0.5769
2	5.545	0.4593
3	6.931	0.3797
4	8.318	0.3261
5	9.467	0.2852
6	9.467	0.2350

TAB. 3.7 – Probabilité que $\theta' \geq \theta'_0$ sachant le résultat du test

Première application : Limites de confiance après rejet

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.05$
2	0.575	0.2358	0.1920	0.1478	0.1212
3	1.962	0.5561	0.4681	0.3749	0.3161
4	2.772	0.6435	0.5484	0.4460	0.3806
4	3.348	0.7451	0.6382	0.5221	0.4473
5	4.159	0.7991	0.6895	0.5695	0.4914
5	4.734	0.8684	0.7524	0.6245	0.5406
6	5.545	0.9036	0.7865	0.6567	0.5708
6	6.120	0.9513	0.8306	0.6957	0.6058
7	6.931	0.9748	0.8536	0.7175	0.6262
7	7.507	1.0078	0.8845	0.7448	0.6502
7	8.318	1.0605	0.9317	0.7841	0.6827
7	9.467	1.1268	0.9881	0.8270	0.7146

TAB. 3.8 – *Limites de confiance inférieures après rejet*

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.05$
2	0.575	0.5241	0.6977	1.0816	1.6190
3	1.962	1.0732	1.3526	1.9242	2.6592
4	2.772	1.1866	1.4739	2.0552	2.7981
4	3.348	1.3409	1.6484	2.2598	3.0262
5	4.159	1.4019	1.7101	2.3208	3.0863
5	4.734	1.4940	1.8084	2.4250	3.1910
6	5.545	1.5293	1.8418	2.4535	3.2123
6	6.120	1.5864	1.8998	2.5095	3.2630
7	6.931	1.6078	1.9191	2.5243	3.2722
7	7.507	1.6442	1.9543	2.5551	3.2966
7	8.318	1.7111	2.0226	2.6203	3.3534
7	9.467	1.8096	2.1268	2.7309	3.4579

TAB. 3.9 – *Limites de confiance supérieures après rejet*

Deuxième application : Temps standardisés d'acceptation

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$c(t_{A_i}, i)$
0	4.380	0.9980
1	4.380	1.0007
2	5.545	0.6127
3	6.931	0.4205
4	8.318	0.3081
5	9.467	0.2611
6	9.467	0.4059

TAB. 3.10 – *Coefficients à l'acceptation*

Deuxième application : Limites de confiance après acceptation

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.05$
0	4.380	3.6440	2.7248	1.9039	1.4631
1	4.380	1.7957	1.4628	1.1260	0.9232
2	5.545	1.4642	1.2342	0.9886	0.8329
3	6.931	1.3378	1.1480	0.9389	0.8020
4	9.318	1.2734	1.1047	0.9149	0.7880
5	9.467	1.2289	1.0746	0.8983	0.7785
6	9.467	1.1568	0.0198	0.8624	0.7544

TAB. 3.11 – *Limites de confiance inférieures après acceptation*

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.05$
0	4.380	-	-	-	-
1	4.380	3.9945	5.3242	8.2840	12.5008
2	5.545	2.7880	3.4863	4.8846	6.6408
3	6.931	2.3528	2.8522	3.8048	4.9395
4	9.318	2.1366	2.5455	3.3091	4.2031
5	9.467	1.9977	2.3551	3.0193	3.8004
6	9.467	1.8675	2.1565	2.7591	3.4883

TAB. 3.12 – *Limites de confiance supérieures après acceptation*

Deuxième application : Probabilités de confiance après acceptation

Nombre d'interruptions	Temps standardisés	$\mathbb{P}(\theta' \geq 2 (t_{A_i}, i))$
0	4.380	0.8883
1	4.380	0.6430
2	5.545	0.4958
3	6.931	0.4047
4	8.318	0.3447
5	9.467	0.2992
6	9.467	0.2434

TAB. 3.13 – Probabilité que $\theta' \geq \theta'_0$ sachant le résultat du test

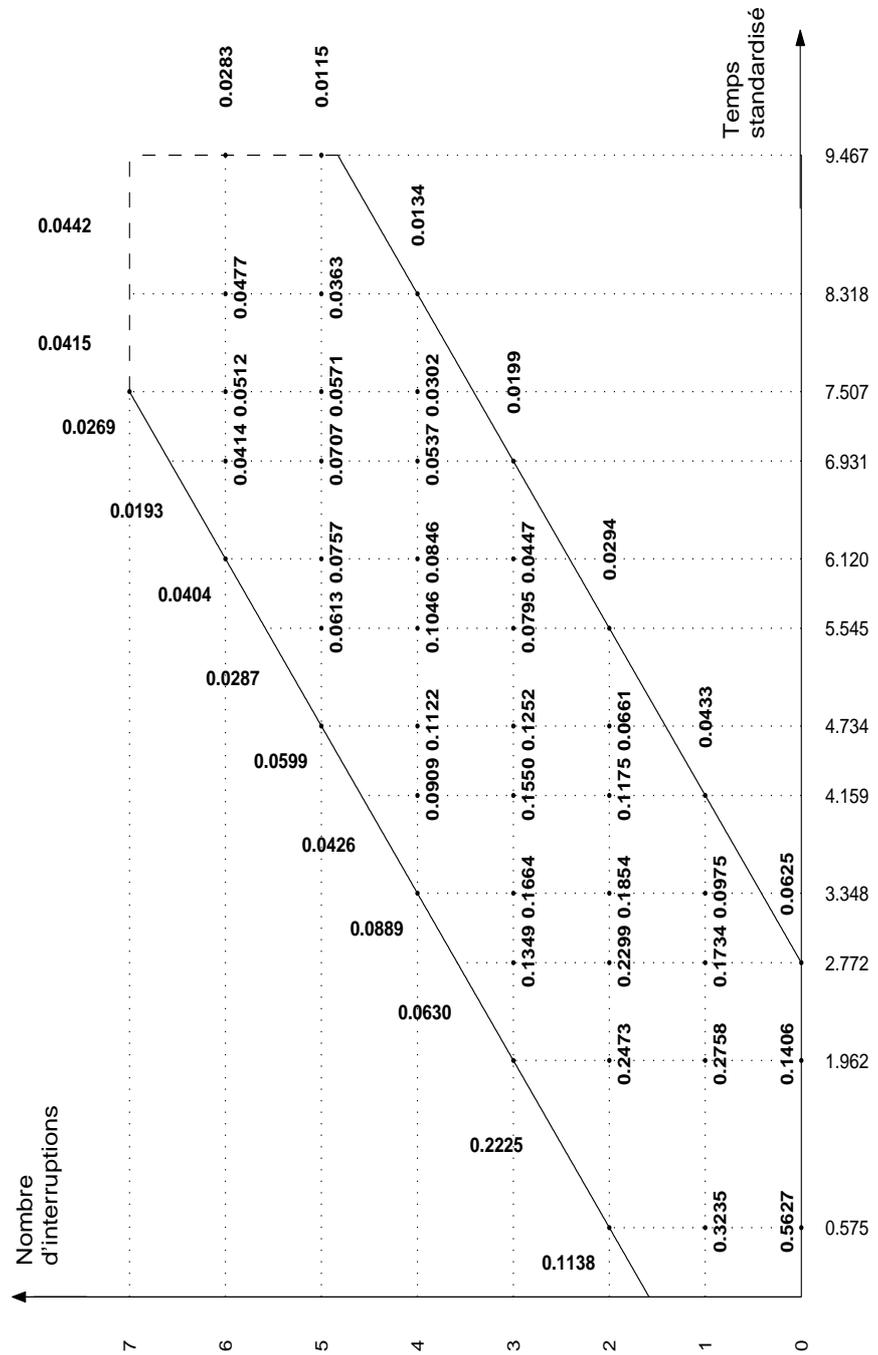


FIG. 3.3 – Probabilités d'acceptation, de continuation (et de rejet)

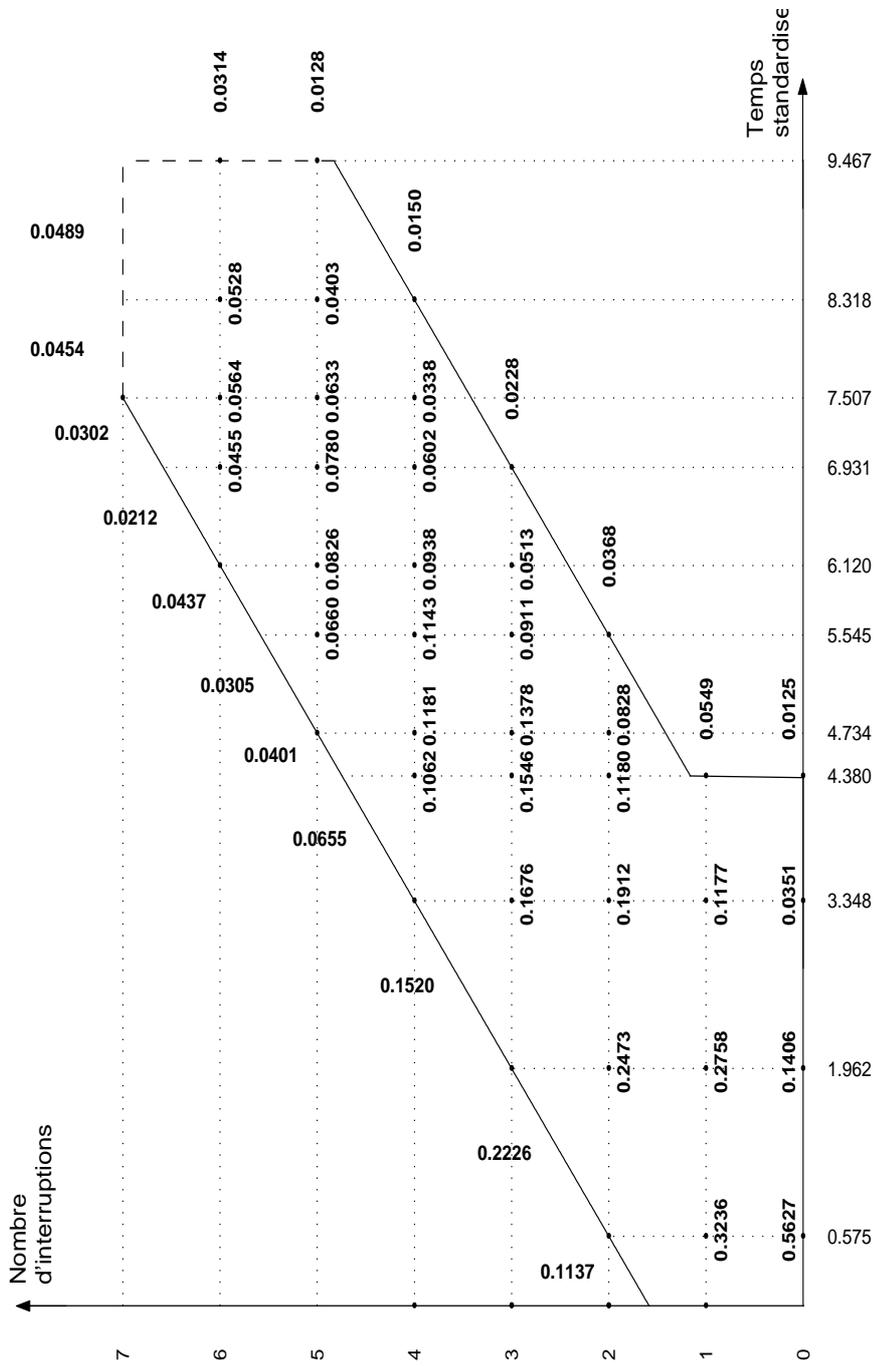


FIG. 3.4 – Probabilités d'acceptation, de continuation (et de rejet)

Annexe A

Processus de Poisson

A.1 Rappels et définitions

On notera $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ définie sur \mathbb{N} . Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, est la loi sur \mathbb{R} de densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x).$$

La loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ est la loi sur \mathbb{R} dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x).$$

Remarque: La loi exponentielle de paramètre λ est une loi Gamma de paramètres $a = 1$ et λ .

Enfin, pour toute variable aléatoire réelle X on utilisera la notation $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ ou $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ selon que X suit une loi exponentielle de paramètre λ , une loi Gamma de paramètres a et λ ou une loi de Poisson de paramètre λ .

Le principal résultat sur les lois Gamma est donné par la proposition suivante.

Proposition A.1.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et c un réel non nul.*

- (i) *Si $X \sim \Gamma(a_1, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(a_2, \lambda)$, alors $X + Y \sim \Gamma(a_1 + a_2, \lambda)$.*
- (ii) *Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, alors $cX \sim \Gamma(a, \frac{\lambda}{c})$.*

Démonstration :

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi $\Gamma(a, \lambda)$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{itX}) = \frac{1}{(1 - \frac{it}{\lambda})^a}.$$

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) &= \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{itY}) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y, \\ &= \frac{1}{(1 - \frac{it}{\lambda})^a} \frac{1}{(1 - \frac{it}{\lambda})^a} \\ &= \frac{1}{(1 - \frac{it}{\lambda})^{a_1+a_2}}. \end{aligned}$$

Comme la fonction caractéristique caractérise les lois, on en déduit que $X + Y \sim \Gamma(a_1 + a_2, \lambda)$.

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{it(cX)}) &= \mathbb{E}(e^{i(tc)X}) \\ &= \frac{1}{(1 - \frac{itc}{\lambda})^a} \\ &= \frac{1}{(1 - \frac{it}{\lambda/c})^a}. \end{aligned}$$

On en déduit de même que $cX \sim \Gamma(a, \frac{\lambda}{c})$. \square

A.2 Le processus de Poisson homogène sur \mathbb{R}^+

A.2.1 Processus ponctuels et fonction de comptage

On suppose que l'on observe une suite d'événements dans le temps, par exemple :

- les arrivées de clients à un guichet,
- les pannes successives d'une machine...

et on note T_n l'instant d'occurrence de l'événement n .

On pose $T_0 = 0$.

On obtient ainsi une suite croissante de variables positives $(T_n)_{n \geq 0}$. Il s'agit d'un **processus ponctuel à valeurs dans \mathbb{R}^+** .

On peut définir la fonction de comptage d'un processus ponctuel.

Définition A.2.1 La *fonction de comptage* associée à un processus ponctuel est définie par :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Proposition A.2.2 La loi du processus $(N(t))_{t \geq 0}$ caractérise la loi du processus ponctuel $(T_n)_{n \geq 1}$.

Démonstration :

Soient $(T_n)_{n \geq 1}$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ deux processus ponctuels sur \mathbb{R}^+ de fonctions de comptage respectives $(N(t))_{t > 0}$ et $(M(t))_{t > 0}$.

Supposons que les deux processus $(N(t))_{t > 0}$ et $(M(t))_{t > 0}$ aient même loi c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1 > 0, \dots, t_n > 0$, les n -uplets $(N(t_1), \dots, N(t_n))$ et $(M(t_1), \dots, M(t_n))$ ont même loi.

Puisque N est la fonction de comptage du processus $(T_n)_{n \geq 1}$, on peut alors écrire $N(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{T_n \leq t\}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1 > 0, \dots, t_n > 0$ on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n) \\ &= \mathbb{P}(N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2, \dots, N(t_n) \geq n). \end{aligned}$$

Et comme M est la fonction de comptage du processus $(U_n)_{n \geq 1}$, on peut écrire $M(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{U_n \leq t\}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1 > 0, \dots, t_n > 0$ on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(U_1 \leq t_1, U_2 \leq t_2, \dots, U_n \leq t_n) \\ &= \mathbb{P}(M(t_1) \geq 1, M(t_2) \geq 2, \dots, M(t_n) \geq n). \end{aligned}$$

Comme $(N(t))_{t > 0}$ et $(M(t))_{t > 0}$ ont même loi, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1 > 0, \dots, t_n > 0$ on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2, \dots, N(t_n) \geq n) \\ &= \mathbb{P}(M(t_1) \geq 1, M(t_2) \geq 2, \dots, M(t_n) \geq n). \end{aligned}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1 > 0, \dots, t_n > 0$ on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \leq t_1, U_2 \leq t_2, \dots, U_n \leq t_n) \end{aligned}$$

ce qui signifie que les deux processus $(T_n)_{n \geq 1}$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ ont même loi. \square

En conséquence, connaître la loi du processus $(T_n)_{n \geq 1}$ **est équivalent à** connaître la loi du processus $(N(t))_{t > 0}$.

On peut alors définir un tel processus soit à partir des instants de saut $(T_n)_{n \geq 1}$ ou à partir de la fonction de comptage $(N(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Définition A.2.3 *Un processus ponctuel $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un processus **simple** si*

$$T_n < +\infty \Rightarrow T_{n-1} < T_n \text{ p.s.}$$

Proposition A.2.4 Toute fonction de comptage $(N(t))_{t>0}$ d'un processus $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ simple vérifie

$$0 \leq N(t) - N(t-0) \leq 1 \text{ p.s.}$$

et

$$N(t) = N(t+0) \text{ p.s.}$$

où $N(t-0)$ et $N(t+0)$ sont respectivement les limites à droite et à gauche de N en t .

Démonstration :

Soit ω fixé. $N(t)(\omega) = n$ est équivalent à $T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)$. Ces inégalités impliquent $T_{n-1}(\omega) < t < T_{n+1}(\omega)$ car $T_{n-1}(\omega) \neq T_n(\omega)$.

- Soit $\epsilon > 0$. La suite $(t - \epsilon)$ croît vers t . Donc pour ϵ assez petit, on a

$$T_{n-1}(\omega) < t - \epsilon < T_{n+1}(\omega).$$

On en déduit alors que $N(t - \epsilon)(\omega) = n - 1$ ou $N(t - \epsilon)(\omega) = n$. D'où

$$0 \leq N(t)(\omega) - N(t - \epsilon)(\omega) \leq 1$$

et par suite

$$0 \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (N(t)(\omega) - N(t - \epsilon)(\omega)) \leq 1.$$

- Soit $\epsilon > 0$. La suite $(t + \epsilon)$ décroît vers t . Donc pour ϵ assez petit, on a

$$T_n(\omega) \leq t < t + \epsilon < T_{n+1}(\omega).$$

On peut en déduire que

$$N(t + \epsilon)(\omega) = N(t)(\omega)$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(t + \epsilon)(\omega) = N(t)(\omega) \text{ p.s.} \square$$

A.2.2 Le processus de Poisson

Définition A.2.5 $T_0 = 0$. Soit $\lambda > 0$. Le processus $(T_n)_{n \geq 1}$ est un **processus de Poisson homogène de paramètre λ** si les variables aléatoires réelles $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$ sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre λ .

Conséquences :

▷ Pour tout $n \geq 1$, $T_n - T_{n-1}$ suit une loi exponentielle de paramètre λ . Donc $T_n - T_{n-1} > 0$ p.s. c'est-à-dire $T_n > T_{n-1}$ p.s.

La suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite presque sûrement croissante. Le processus $(T_n)_{n \geq 1}$ est donc un processus ponctuel simple.

▷ La durée qui sépare deux événements successifs suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$. Donc la durée moyenne entre deux événements successifs est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

▷ La durée qui sépare $(n + 1)$ événements successifs suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$. En effet, $\forall r \geq 0$,

$$T_{r+n} - T_r = (T_{r+n} - T_{r+n-1}) + \dots + (T_{r+1} - T_r).$$

Les accroissements étant indépendants et de loi $\Gamma(1, \lambda)$, on peut en déduire que $T_{r+n} - T_r \sim \Gamma(n, \lambda)$ d'après la proposition A.1.1.

Par conséquent, la durée moyenne entre $(n + 1)$ événements successifs est égale à $\frac{n}{\lambda}$.

▷ La probabilité qu'aucun événement ne se produise pendant une durée $h > 0$ est :

$$\mathbb{P}(T_1 > h) = \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda h}.$$

A.2.3 Propriétés du processus de Poisson

Proposition A.2.6 Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ un processus de Poisson homogène de paramètre λ et de fonction de comptage N . Alors :

(i) $\forall n \geq 1$, (T_1, \dots, T_n) a pour densité

$$\lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{I}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .

(ii) $\forall t > 0$, $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt .

(iii) $\forall n \geq 1$, la loi de (T_1, \dots, T_n) sachant $\{N(t) = n\}$ a pour densité

$$\frac{n!}{t^n} \mathbb{I}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .

Conséquences :

▷ On peut définir la **cadence** d'un processus de Poisson homogène de paramètre λ comme le nombre moyen d'événements pendant une durée égale à 1. Grâce à (ii) de la proposition, on en déduit que la cadence du processus de Poisson est égale à λ .

▷ Application : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \mathbb{P}(\chi_{2(n+1)}^2 > 2\lambda). \quad (\text{A.1})$$

Démonstration :

Considérons un processus de Poisson de paramètre 1.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq n) &= \mathbb{P}(N(\lambda) \leq n) \text{ car } N(\lambda) \sim \mathcal{P}(\lambda,1) \\ &= \mathbb{P}(T_{n+1} > \lambda).\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{P}(T_{n+1} > \lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{-x} x^n dx \text{ car } T_{n+1} \sim \Gamma(n+1,1).$$

On effectue le changement de variable $y = 2x$ et on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{n+1} > \lambda) &= \int_{2\lambda}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{y}{2}\right)^n e^{-\frac{y}{2}} \frac{dy}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}n!} y^n e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \mathbb{P}(\Gamma(n+1, \frac{1}{2}) > 2\lambda) \\ &= \mathbb{P}(\chi_{2(n+1)}^2 > 2\lambda). \square\end{aligned}$$

Démonstration de la proposition :

(i) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n)) \\ &= \mathbb{E}(f(T_1, (T_2 - T_1) + T_1, \dots, (T_n - T_{n-1}) + \dots + T_1)) \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+)^n} f(u_1, u_1 + u_2, \dots, u_1 + \dots + u_n) \lambda e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_n} du_1 \dots du_n.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable défini par la bijection

$$\begin{aligned}\Phi : (\mathbb{R}_+)^n &\rightarrow \Delta_n \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto (u_1, u_1 + u_2, \dots, u_1 + \dots + u_n) = (t_1, \dots, t_n)\end{aligned}$$

où $\Delta_n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < t_1 < \dots < t_n\}$.

On a $|\det(\text{Jac}\Phi)| = 1$ donc

$$\mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n)) = \int_{\Delta_n} f(t_1, \dots, t_n) \lambda^n e^{-\lambda t_n} dt_1 \dots dt_n.$$

(ii) Soit à nouveau $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n) \mathbb{I}_{\{N(t)=n\}}) \\ &= \mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n) \mathbb{I}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}})\end{aligned}$$

car $\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ d'après l'expression de la fonction de comptage.
Donc

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n) \mathbb{I}_{\{N(t)=n\}}) \\
&= \int_{\Delta_{n+1}} f(t_1, \dots, t_n) \mathbb{I}_{\{t_n \leq t < t_{n+1}\}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_1 \dots dt_{n+1} \text{ grâce à (ii)} \\
&= \int \lambda^n f(t_1, \dots, t_n) \mathbb{I}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} \left(\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} \right) dt_1 \dots dt_n \\
&= \int \lambda^n e^{-\lambda t} f(t_1, \dots, t_n) \mathbb{I}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n.
\end{aligned}$$

Pour $f \equiv 1$ on obtient :

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \lambda^n \int_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n.$$

Or pour tout $n \geq 1$ on a

$$\int_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n = \frac{t^n}{n!}.$$

La démonstration se fait par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$, $\int_{\{0 < t_1 < t\}} dt_1 = t$.
- Supposons la propriété vraie au rang n , $n \geq 1$ ie

$$\int_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n = \frac{t^n}{n!}.$$

et démontrons la propriété au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < t\}} dt_1 \dots dt_{n+1} \\
&= \int_0^t \left(\int_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}\}} dt_1 \dots dt_n \right) dt_{n+1} \\
&= \int_0^t \frac{(t_{n+1})^n}{n!} dt_{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence,} \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} (t_{n+1})^{n+1} \right]_0^t \\
&= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. On peut donc en conclure que $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

(iii) Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mesurable bornée.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n) | N(t) = n) \\
&= \frac{\mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n) \cdot \mathbb{I}_{\{N(t)=n\}})}{\mathbb{P}(N(t)=n)} \\
&= \frac{\int f(t_1, \dots, t_n) \lambda^n e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \int f(t_1, \dots, t_n) \frac{n!}{t^n} \mathbb{I}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n. \square
\end{aligned}$$

Remarque :

La loi de (T_1, \dots, T_n) sachant $\{N(t) = n\}$ est une loi de Dirichlet d'ordre n sur $[0, t]$.

Il est possible d'obtenir une loi de Dirichlet d'une autre manière.

Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0, t]$. On note $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ le réarrangement croissant de X_1, \dots, X_n . Alors $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ suit une loi de Dirichlet d'ordre n sur $[0, t]$.

Proposition A.2.7 Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ un processus ponctuel à valeurs dans \mathbb{R}^+ de fonction de comptage N .

Alors c'est un processus de Poisson homogène de paramètre λ **si et seulement si :**

1) $N(0) = 0$ p.s

2) N est à accroissements indépendants ie $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ les variables aléatoires

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

sont indépendantes.

3) $\forall 0 \leq s < t$, $N(t) - N(s)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$.

Démonstration :

\Rightarrow Supposons que $(T_n)_{n \geq 1}$ est un processus de Poisson homogène de paramètre λ .

1) On a

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{T_n \leq t\}}.$$

De plus $\forall n \geq 1$ $T_n > 0$ p.s car $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Donc $\forall n \geq 1$ $\mathbb{I}_{\{T_n \leq 0\}} = 0$ p.s. et $N(0) = 0$ p.s.

2) et 3) Soient $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ et k_1, k_2, \dots, k_n des entiers positifs ou nuls tels que $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Calculons la probabilité

$$\mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n).$$

L'événement $\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n\}$ est inclus dans l'événement $\{N(t_n) = k\} = \{T_k \leq t_n < T_{k+1}\}$.

Alors, la suite (T_n) étant croissante, lorsque l'on remplace chaque $N(t_i)$ par son expression en fonction des T_n on obtient :

$$N(t_i) = \sum_{j=1}^k \mathbb{I}\{T_j \leq t_i\}.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n). \\ = & \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{T_i \leq t_1\} = k_1, \dots, \sum_{i=1}^k (\mathbb{I}\{T_i \leq t_n\} - \mathbb{I}\{T_i \leq t_{n-1}\}) = k_n \mid N(t_n) = k). \mathbb{P}(N(t_n) = k) \\ = & \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{T_i \leq t_1\} = k_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{t_{n-1} < T_i \leq t_n\} = k_n \mid N(t_n) = k). \mathbb{P}(N(t_n) = k). \end{aligned}$$

Soient X_1, \dots, X_k , un échantillon de k variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, t_n]$. On note $X_{(1)}, \dots, X_{(k)}$ l'échantillon réordonné de loi de Dirichlet d'ordre k sur $[0, t_n]$. D'après la proposition précédente,

$$\mathcal{L}(T_1, \dots, T_k \mid N(t_n) = k) = \mathcal{L}(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n) \\ = & \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{X_{(i)} \leq t_1\} = k_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{t_{n-1} < X_{(i)} \leq t_n\} = k_n). \mathbb{P}(N(t_n) = k). \end{aligned}$$

Or pour tout $0 \leq a < b \leq t_n$ le nombre de X_i dans $]a, b]$ est égal au nombre de $X_{(i)}$ dans $]a, b]$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n) \\ = & \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{X_i \leq t_1\} = k_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{t_{n-1} < X_i \leq t_n\} = k_n). \mathbb{P}(N(t_n) = k). \end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer la probabilité

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{X_i \leq t_1\} = k_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}\{t_{n-1} < X_i \leq t_n\} = k_n). \quad (\text{A.2})$$

Comme les X_i sont de même loi, cette probabilité est égale à :

$$\begin{aligned} & \underbrace{C_k^{k_1} \cdot C_{k-k_1}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{k-k_1-\dots-k_{n-2}}^{k_{n-1}}}_{\text{Nombre de configurations}} \\ & \times \underbrace{\mathbb{P}(X_1, \dots, X_{k_1} \in]0, t_1]; \dots; X_{k_1+\dots+k_{n-1}+1}, \dots, X_k \in]t_{n-1}, t_n])}_{\text{Probabilité d'une configuration particulière}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n) \\
&= \frac{k!}{k_1! \dots k_{n-1}! k_n!} \times \left(\frac{t_1}{t_n}\right)^{k_1} \times \dots \times \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{t_n}\right)^{k_n} e^{-\lambda t_n} \frac{(\lambda t_n)^k}{k!} \\
&= \frac{(t_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{(t_1 - t_2)^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{(t_n - t_{n-1})^{k_n}}{k_n!} \lambda^{k_1 + \dots + k_n} e^{-\lambda(t_1 + \dots + (t_n - t_{n-1}))} \quad (A.3) \\
&= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{\lambda t_1} \times \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \times \dots \times \frac{[\lambda(t_n - t_{n-1})]^{k_n}}{k_n!} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}. \quad (A.4)
\end{aligned}$$

Remarque :

Pour effectuer le calcul (A.2) on a implicitement supposé que $\forall i \ k_i > 0$. Cependant la formule (A.3) reste valable lorsque les $k_i \geq 0$. Pour le vérifier il suffit lorsque $k_j = 0$ de faire le même dénombrement avec aucun X_i dans l'intervalle $]t_{j-1}, t_j]$.

La formule (A.4) montre que les accroissements de N sont indépendants et que pour $0 \leq s < t$, $N(t) - N(s) \sim \mathcal{P}(\lambda(t - s))$.

\Leftrightarrow Réciproquement, on suppose que $(T_n)_{n \geq 1}$ est un processus ponctuel sur \mathbb{R}^+ de fonction de comptage $(N(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ vérifiant 1), 2) et 3).

Les conditions 2) et 3) permettent de déterminer la loi du processus $N(t)_{t > 0}$. Pour tout $n \geq 1$ et tous $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, le n -uplet $(N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}))$ a pour loi

$$\mathcal{P}(\lambda t_1) \otimes \mathcal{P}(\lambda(t_1 - t_2)) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(\lambda(t_n - t_{n-1})).$$

La loi de $(N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_n))$ est connue puisque

$$\begin{aligned}
& (N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_n)) \\
&= (N(t_1), (N(t_2) - N(t_1)) + N(t_1), \dots, (N(t_n) - N(t_{n-1})) + \dots + N(t_1)).
\end{aligned}$$

D'après la proposition A.2.2, on sait que la loi de la fonction de comptage d'un processus ponctuel caractérise la loi du processus ponctuel.

Or d'après la première implication, on sait que la loi de $N(t)_{t > 0}$ est celle de la fonction de comptage d'un processus de Poisson homogène de paramètre λ . On en déduit donc que $(T_n)_{n \geq 1}$ est un processus de Poisson homogène de paramètre λ .

Annexe B

Martingales à temps discret

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

B.1 Martingales et temps d'arrêt

Définition B.1.1 Une suite croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus de \mathcal{A} est appelée une *filtration*.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé filtré*.

Définition B.1.2 Un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est *adapté* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est \mathcal{F}_n -mesurable.

Exemple :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On définit $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, la tribu engendrée par les variables aléatoires X_1, \dots, X_n .

La suite \mathcal{F}^X est une filtration appelée filtration naturelle du processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est \mathcal{F}^X -adapté.

Définition B.1.3 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus \mathcal{F} -adapté tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n,$$

on dit que le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *martingale*.

Exemples :

Soit X_1, \dots, X_n, \dots une suite de variables aléatoires i.i.d. dont la loi dépend d'un paramètre $\theta \in \Theta$.

On note $f(x, \theta)$ la densité de X_1 au point x si X_1 est absolument continue ou la probabilité que X_1 prenne la valeur x si X_1 est discrète.

On se fixe une valeur θ du paramètre.

On pose $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on considère, comme dans le paragraphe 1.1.1, le processus $Z_n = \text{Log} \frac{f(X_n, \theta_1)}{f(X_n, \theta_0)}$.

On pose alors $S_0 := 0$ et $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ pour $n \geq 1$.

(1) On suppose que $\mathbb{E}_\theta(|Z_1|) < +\infty$ et on définit $M_n = S_n - n\mathbb{E}_\theta(Z_1)$. Alors $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une \mathcal{F} -martingale.

Démonstration :

Pour tout $n \leq 0$, M_n est \mathcal{F}_n -mesurable et intégrable car on a supposé que les Z_i l'étaient.

De plus,

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \quad & \mathbb{E}_\theta(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}_\theta(S_n - n\mathbb{E}_\theta(Z_1) | \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}_\theta(S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}_\theta(Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) - n\mathbb{E}_\theta(Z_1) \\
&= S_{n-1} + \mathbb{E}_\theta(Z_n) - n\mathbb{E}_\theta(Z_1) \text{ car } S_{n-1} \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable,} \\
&= S_{n-1} - (n-1)\mathbb{E}_\theta(Z_1) \text{ car les } Z_i \text{ ont même loi,} \\
&= M_{n-1}.
\end{aligned}$$

Donc $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une \mathcal{F} -martingale.

(2) On suppose que $\text{Var}_\theta(Z_1) < +\infty$. On pose $A_n = n\text{Var}_\theta(Z_1)$ et on définit $W_n = M_n^2 - A_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une \mathcal{F} -martingale.

Démonstration :

Pour tout $n \geq 0$ W_n est \mathcal{F}_n -mesurable et intégrable car on a supposé $\text{Var}_\theta(Z_1) < +\infty$. D'une part, on a pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta((M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}_\theta((Z_n - \mathbb{E}_\theta(Z_1))^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}_\theta((Z_n - \mathbb{E}_\theta(Z_1))^2) \text{ car les } Z_i \text{ sont indépendants,} \\
&= \text{Var}_\theta(Z_1) \text{ car les } Z_i \text{ sont de même loi.}
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta((M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}_\theta(M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - 2M_{n-1}\mathbb{E}_\theta(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) + M_{n-1}^2 \\
&= \mathbb{E}_\theta(M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - 2M_{n-1}^2 + M_{n-1}^2 \text{ car } (M_n)_{n \geq 0} \text{ est une } \mathcal{F}\text{-martingale,} \\
&= \mathbb{E}_\theta(M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1}^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}_\theta(M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1}^2 = \text{Var}_\theta(Z_1). \quad (\text{B.1})$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta(W_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}_\theta(M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - n\text{Var}_\theta(Z_1) \\
&= M_{n-1}^2 + \text{Var}_\theta(Z_1) - n\text{Var}_\theta(Z_1) \text{ par la relation (B.1)} \\
&= M_{n-1}^2 - (n-1)\text{Var}_\theta(Z_1) \\
&= W_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $(W_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F} -martingale. \square

Définition B.1.4 Une variable aléatoire $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est appelé **\mathcal{F} -temps d'arrêt** si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\omega, T(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Exemple :

Soit $S(A, B)$, le test séquentiel du rapport des probabilités de la définition 1.1.1. et N le nombre d'observations nécessaires au test pour prendre une décision. Soit \mathcal{F} est la filtration définie dans l'exemple précédent.

Alors, la variable aléatoire N est un \mathcal{F} -temps d'arrêt. En effet, on pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \{N = n\} &= \{ \text{Log}A < Z_1 < \text{Log}B, \dots, \text{Log}A < S_{n-1} < \text{Log}B, S_n \geq A \} \\ &\cup \{ \text{Log}A < Z_1 < \text{Log}B, \dots, \text{Log}A < S_{n-1} < \text{Log}B, S_n \leq B \} \\ &\in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

B.2 Processus arrêtés

Théorème B.2.1 Soient $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une \mathcal{F} -martingale et T un \mathcal{F} -temps d'arrêt. Alors, le processus arrêté

$$X^T = (X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$$

est une \mathcal{F} -martingale. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration :

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_{T \wedge n} &= \sum_{k=0}^{n-1} X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}} + X_n \mathbb{1}_{\{T \wedge n = n\}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}} + X_n \mathbb{1}_{\{T \geq n\}}. \end{aligned}$$

Pour $k \leq n-1$, on a $X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.

Puisque $\{T \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, on en déduit que $X_n \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.

Donc $X_{T \wedge n} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.

▷ De plus, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{T \wedge (n+1)} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\sum_{k=0}^n X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{T \geq n+1\}} | \mathcal{F}_n) \\ &= \sum_{k=0}^n X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}} + \mathbb{1}_{\{T \geq n+1\}} \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

car $\sum_{k=0}^n X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}}$ et $\mathbb{1}_{\{T \geq n+1\}}$ sont \mathcal{F}_n -mesurables.

Enfin, puisque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, on a $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ et donc

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge (n+1)} | \mathcal{F}_n) = \sum_{k=0}^n X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}} + X_n \mathbb{1}_{\{T \geq n+1\}} = X_{T \wedge n}.$$

▷ Si on intègre l'inégalité précédente, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge (n+1)}) = \mathbb{E}(X_{T \wedge n}).$$

On en déduit alors que la suite $(\mathbb{E}(X_{T \wedge n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0). \square$$

Annexe C

Méthode générale pour obtenir des intervalles de confiance

On suppose que l'on dispose d'un échantillon de variables aléatoires i.i.d. X_1, \dots, X_n de densité $f(x, \theta)$ au point x avec $\theta \in \Theta$.

Supposons de plus que l'on dispose d'un estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ (par exemple l'estimateur du maximum de vraisemblance) ayant pour densité $g(\hat{\theta}, \theta)$ au point $\hat{\theta}$.

Soit $\gamma \in]0, 1[$. On va chercher à obtenir un intervalle de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ pour le paramètre θ .

- On peut pour chaque valeur de θ définir deux quantités h_1 et h_2 telles que

$$\mathbb{P}(\hat{\theta} < h_1) = \int_{-\infty}^{h_1} g(\hat{\theta}, \bar{\theta}) d\hat{\theta} = \frac{\gamma}{2} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbb{P}(\hat{\theta} > h_2) = \int_{h_2}^{+\infty} g(\hat{\theta}, \bar{\theta}) d\hat{\theta} = \frac{\gamma}{2} \quad (\text{C.2})$$

Evidemment h_1 et h_2 dépendent de θ . Il s'agit en fait de deux fonctions de θ que l'on peut représenter graphiquement et dont les valeurs sont déterminées grâce aux équations (C.1) et (C.2).

De plus, pour tout $\theta \in \Theta$, $h_1(\theta)$ et $h_2(\theta)$ vérifient l'équation

$$\mathbb{P}(h_1(\theta) < \hat{\theta} < h_2(\theta)) = 1 - \gamma. \quad (\text{C.3})$$

- Si maintenant, sur la base d'un échantillon de réalisations x_1, \dots, x_n de X_1, \dots, X_n , on calcule la réalisation $\hat{\theta}'$ de l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ , alors on peut tracer la droite d'équation $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$ sur le même graphique.

On suppose alors qu'elle coupe chacune des courbes représentatives de h_1 et h_2 en un seul point et on note θ'_1 et θ'_2 les projections des points d'intersection entre la droite et les deux courbes sur l'axe des abscisses. La FIG. C.1 représente la construction graphique de θ_1 et θ_2 .

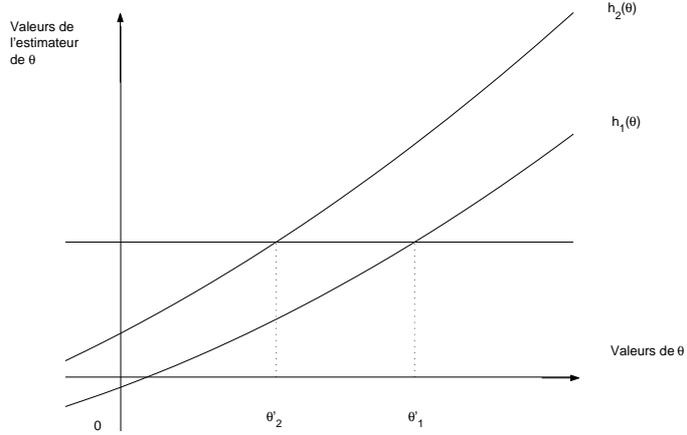


FIG. C.1 – Détermination graphique de θ'_1 et θ'_2

Soient alors les variables aléatoires θ_1 et θ_2 dont les réalisations θ'_1 et θ'_2 sont construites selon la méthode précédente. Puisque pour chaque réalisation $\hat{\theta}'$ de $\hat{\theta}$, on a

$$\theta'_2 < \theta < \theta'_1 \Leftrightarrow \hat{\theta}' < h_2(\theta) \text{ et } h_1(\theta) < \hat{\theta}',$$

alors

$$\mathbb{P}(\theta_2 < \theta < \theta_1) = \mathbb{P}(h_1(\theta) < \hat{\theta} < h_2(\theta)) = 1 - \gamma.$$

On peut donc en déduire que $]\theta_2, \theta_1[$ est un intervalle de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ pour le paramètre θ .

Remarque :

En pratique, on ne connaît pas les variables aléatoires θ_1 et θ_2 de manière explicite mais simplement des réalisations θ'_1 et θ'_2 obtenues grâce à des observations.

On notera encore θ_1 et θ_2 les réalisations des variables aléatoires θ_1 et θ_2 . De même, on notera encore $\mathbb{P}(\theta_2 < \theta < \theta_1) = 1 - \gamma$, ce qui signifiera que la probabilité que l'on ait construit un intervalle qui recouvre le vrai paramètre θ est égale à $1 - \gamma$.

• Il est possible dans certains cas de déterminer θ'_1 et θ'_2 sans calculer toutes les valeurs de h_1 et h_2 . D'après la figure, la borne inférieure θ_2 de l'intervalle de confiance est déterminée par l'équation

$$\int_{\hat{\theta}'}^{+\infty} g(\hat{\theta}, \theta_2) d\hat{\theta} = \frac{\gamma}{2}, \quad (\text{C.4})$$

et la borne supérieure θ_1 de l'intervalle de confiance est donnée par la relation

$$\int_{+\infty}^{\hat{\theta}'} g(\hat{\theta}, \theta_1) d\hat{\theta} = \frac{\gamma}{2}. \quad (\text{C.5})$$

Si les expressions dans le membre de gauche de (C.4) et (C.5) sont explicites en θ et peuvent être résolues de manière unique en θ , alors les racines sont des limites de confiance à $(1 - \gamma)100\%$ pour le paramètre θ .

Remarque :

La méthode que nous venons de décrire est applicable à un échantillon X_1, \dots, X_n de variables aléatoires discrètes et un estimateur dicret $\hat{\theta}$ de θ .

Si on note $g(\hat{\theta}', \theta)$ la probabilité que $\hat{\theta}$ prenne la valeur $\hat{\theta}'$, les équations (C.2) et (C.1) ne pouvant être résolues exactement, la méthode précédente donne donc des intervalles dont la confiance est supérieure à $(1 - \gamma)100\%$.

Conclusion

Pour résoudre le problème de qualification de capteurs, nous nous sommes intéressés aux procédures séquentielles, connues pour nécessiter un nombre d'observations inférieur en moyenne, à celui d'un test classique, pour prendre une décision.

Après avoir étudié les tests séquentiels du rapport des probabilités, nous avons appliqué les résultats obtenus au premier chapitre au problème du MTBO, où le temps moyen entre deux interruptions est modélisé par une loi exponentielle.

Dans ce cas précis, le nombre $N(t)$ d'interruptions survenues au cours du temps t étant connu, nous avons pu construire une version continue du test séquentiel du rapport des probabilités permettant une économie de temps non négligeable à l'acceptation.

Nous avons alors été naturellement conduits à étudier le test séquentiel du rapport des probabilités pour des processus à temps continu, dont les principales propriétés ont été démontrées à partir de celle du TSRP classique par discrétisation du temps.

Bien que nous ayons ainsi entièrement déterminé les propriétés de ce test, il a fallu tenir compte des impératifs des industriels. Le test construit, bien qu'économe en temps pouvait aléatoirement nécessiter un temps relativement long pour prendre une décision.

Or les industriels, pour des raisons d'ordre pécuniaire et un soucis de planification, souhaitent que la qualification se fasse en un temps inférieur à un certain temps t_0 fixé au préalable. Nous avons alors tronqué la procédure séquentielle afin de décider en un temps donné si un capteur était conforme ou pas.

Les capteurs jouent un rôle prépondérant au moment de l'atterrissage. Une fois que la procédure de test a accepté le capteur, il est important de déterminer un intervalle de confiance pour le MTBO, afin de connaître la confiance à accorder à cette décision. Nous avons obtenu des limites de confiance inférieures et supérieures du MTBO qui dépendent du nombre d'interruptions qui se sont produites avant l'acceptation. Il nous a aussi été possible de calculer la probabilité que le vrai MTBO soit supérieur à la valeur minimale θ_0 autorisée pour la mise en service du capteur.

En pratique, les capteurs étant observés nécessairement sur une durée d'un an, nous avons intégré cette information à la procédure de test, ce qui nous a permis d'accorder une plus grande confiance au fait que le MTBO soit supérieur ou égal à la valeur minimale autorisée et d'obtenir des intervalles de confiance de bien plus faible amplitude lorsque l'acceptation se faisait avec un petit nombre d'observations.

Conformément aux souhaits des industriels, la méthode que nous avons utilisée dans ce mémoire pour obtenir des intervalles de confiance n'utilise pas d'arguments bayésiens.

Cependant il est possible de faire une hypothèse sur la loi a priori du paramètre et d'obtenir des intervalles de confiance. De nombreux résultats ont été publiés dans ce domaine. De manière générale, on constate que l'utilisation de méthodes bayésiennes conduit à l'obtention d'intervalles dont la probabilité de confiance est supérieure. Dans [7], Sumerlin compare une méthode classique à une méthode bayésienne et pour plus de détails, on pourra se référer aux travaux de Schick et Drnas [6].

Bibliographie

Articles

[1] AROIAN, L.A. (1968) *Sequential Analysis, Direct Method*, Technometrics, Vol 10, p-p 125-132.

[2] AROIAN, L.A. (1976) *Applications of the Direct Method in Sequential Analysis*, Technometrics, Vol 18, p-p 301-306.

[3] BRYANT ET SCHMEE (1979) *Confidence Limits on MTBF for Sequential Test Plans of MIL-STD 781*, Technometrics, Vol 21, p-p 33-42.

[4] EPSTEIN, B ET SOBEL, M (1955) *Sequential life tests in the exponential case*, Ann. Math. Stat., Vol 26, p-p 82-93.

[5] DVORETSKY, A, KIEFER, J ET WOLFOWITZ, J (1963) *Sequential decision problem for processus with continuous time parameter. Testing hypothesis*, Ann. Math. Stat., Vol 24, p-p 254-264.

[6] SCHICK, G.J ET DRNAS, T.M (1971) *Bayesian Reliability Demonstration* MDAC Paper WD1559, McDonnell Douglas Astronautics Company-West, Huntington Beach, Calif.

[7] SUMERLIN, W.T (1972) *Confidence calculations for MIL-STD 781*, Annual Reliability and Maintainability Symposium IEEE Catalog Number 72CH0577-B, p-p 205-212.

Livres

[8] COCOZZA-THIVENT, C (1997) *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes* Springer-Verlag.

[9] GHOSH, BK (1970) *Sequential tests of statistical hypothesis* Addison-Wesley Publishing Compagny.

[10] MANN, N.R, SHAFER, R.E ET SINGPURWALLA, N.D (1974) *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley & Sons, Inc.

[11] MOOD, A ET GRAYBILL, F.A (1963) *Introduction to the theory of Statistics* (2nd ed.) McGraw-Hill.

[12] WETHERHILL (1969) *Méthodes séquentielles en statistiques* Dunod.

[13] WALD, A (1947) *Sequential Analysis* John Wiley & Sons, Inc.

Autres

[13] DEDIEU, JM ET SAURAT N (2000) *Procédures de Tests Séquentiels et Application à un problème de Contrôle de déclaration de stock*, Mémoire de maîtrise à l'Université Paul Sabatier.

[14] FELIX, P (1998) *Contrôle d'une déclaration de stock en présence d'erreurs de mesures aléatoires*, Memoire DEA à l'Université Paul Sabatier.

[15] POWE, M ET HARDING, S (2000) *ILS Certification Requirements, Final Report* DERA/WSS/WX1/CR980799/2.3.